universität
innsbruck

Mathematik

Kapitel 7
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Überblick

Inhalt: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Abschnitte	Skriptum
Grundbegriffe	5.1
Kopplung von Ereignissen (Bedingte Wahrscheinlichkeit)	5.2
Zufallsvariablen	5.1
Erwartungswert	5.3
Varianz	5.3
Normalverteilung	5.4
Binomialverteilung	5.5

Überblick

Allgemeine Bemerkungen: Abweichungen vom Skriptum.

- **Kombinatorik** wird **nicht** behandelt, insbesondere nicht die Musteraufgaben (MA), die Kombinatorik verwenden (MA 5.4, 5.5, 5.7, 5.12, 5.14).
- Der **Wahrscheinlichkeitsbegriff** wird allgemeiner eingeführt. Das Skriptum beschränkt sich auf die statistische Wahrscheinlichkeit.
- Das Thema **Zufallsvariablen** wird ausführlicher diskutiert. Insbesondere die Besprechung der Konzepte von **Erwartungswert** und **Varianz** fällt intensiver aus.

Die VO-Folien sollten für das Verständnis dieser Abweichungen/Ergänzungen ausreichen. Falls detailliertere Literatur benötigt wird: Siehe bspw. Kapitel 8–9 in Josef Schira (2003), *Statistische Methoden der VWL und BWL*, Pearson Studium.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Grundbegriffe

Generelle Ziele

Gefühl für Wahrscheinlichkeiten/Zufallsvorgänge:

- Sind beim zweimaligen Werfen eines sechsseitigen Würfels die Augensummen 11 und 12 gleich wahrscheinlich, wie das Gottfried Wilhelm Leibniz vermutete?
- Welche Aussage ist wahrscheinlicher?
  - *A*: Mein Nachbar steht wochentags immer um 2.00 Uhr in der Nacht auf.
  - *B*: Mein Nachbar ist Bäcker und steht wochentags immer um 2.00 Uhr in der Nacht auf.
- Beurteilung der Qualität eines Tests: Ein AIDS-Test erkennt infizierte Personen mit 99.9%iger Sicherheit. Bei lediglich 0.2% der gesunden Menschen liefert der Test fälschlicherweise ein positives Ergebnis. In den Industrieländern sind 0.1% der Bevölkerung infiziert. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person gesund ist?

Generelle Ziele

Als Grundlage für weiterführende Vorlesungen:

- Ein Fondsmanager möchte das betreute Kapital auf mehrere Anlageformen mit unterschiedlichen Risiken verteilen. Wie soll das Kapital aufgeteilt werden?
- Eine Bank hat ein Portfolio von Krediten. Wie kann das damit verbundene Verlustrisiko beurteilt werden?

Als Grundlage für die induktive Statistik:

- Grundlage der meisten statistischen Verfahren ist eine wahrscheinlichkeitstheoretische Beschreibung der dahinter stehenden zufälligen Vorgänge.

Grundbegriffe

Zufallsvorgang / Zufallsexperiment

Ein **Zufallsvorgang** bzw. **Zufallsexperiment** führt zu einem von mehreren, sich gegenseitig ausschließenden Ergebnissen.
Es ist vor der Durchführung ungewiss, welches Ergebnis tatsächlich eintreten wird.

Musteraufgabe 5.3 – Werfen ein Würfels

Beschreiben Sie den Zufallsvorgang beim Werfen eines Würfels.

Lösung: Der Zufallsvorgang besteht darin, dass ein Würfel mit den Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ geworfen wird. Vor dem Wurf weiß man nicht, welche Augenzahl eintritt.

Grundbegriffe

Ergebnismenge / Ergebnisraum

Als **Ergebnismenge** bzw. **Ergebnisraum** Ω bezeichnet man die Menge aller möglichen Ergebnisse eines Zufallsvorgangs.

Musteraufgabe 5.3 – Werfen ein Würfels

Geben Sie die Ergebnismenge an.

Lösung:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Grundbegriffe

Ereignis

Ein Ereignis ist eine Aussage über ein mögliches Ergebnis eines Zufallsexperiments.
Jedes **Ereignis** ist Teilmenge der Ergebnismenge, jene Teilmenge von Ergebnissen, für die die Aussage zutrifft.
Einelementige Ereignisse heißen **Elementarereignisse**.

Wir gehen im Folgenden zunächst von einer endlichen Anzahl von Ergebnissen aus.

Grundbegriffe

Musteraufgabe 5.3 – Werfen eines Würfels

Das Zufallsexperiment besteht darin, dass ein Würfel mit den Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ geworfen wird.

- Stellen Sie das Ereignis **gerade Augenzahl** durch eine Teilmenge der Ergebnismenge dar.

Lösung:

- *Ergebnisraum:* Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sind möglich, d.h. Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- *Ereignis gerade Augenzahl*: $A = \{2, 4, 6\}$.

Weitere mögliche Ereignisse:

- Augenzahl größer als 4: $B = \{5, 6\}$.
- Augenzahl 6: $C = \{6\}$.

Grundbegriffe

Mathematische Beschreibung eines Zufallsvorgangs

Ein Zufallsvorgang wird mathematisch beschrieben durch Angabe der **Ergebnismenge** und Zuweisung von **Wahrscheinlichkeiten** für alle interessierenden **Ereignisse**.

Musteraufgabe 5.3 – Werfen eines Würfels

Ordnen Sie jedem Elementarereignis der Ergebnismenge eine Wahrscheinlichkeit zu.

Lösung:

Wenn der Würfel fair ist, dann gilt

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \cdots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}.$$

Mathematische Beschreibung zufälliger Vorgänge

Wahrscheinlichkeiten:

- Ordne jedem Ereignis A eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zwischen 0 und 1 zu.
  $P(A) = 0$ bedeutet, dass das Ereignis nie eintritt.
  $P(A) = 1$ bedeutet, dass das Ereignis sicher eintritt.
- *Intuitiv:* Der Zufallsvorgang ist ausreichend genau beschrieben, wenn jedem Elementarereignis eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet ist.

Mathematische Beschreibung zufälliger Vorgänge

Wahrscheinlichkeitsmaß

Sei $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ ein endlicher Ergebnisraum.
Ein **Wahrscheinlichkeitsmaß** ordnet jeder Teilmenge A von Ω eine Wahrscheinlichkeit $P(A)$ zu, so dass folgende **Axiome von Kolmogorov** erfüllt sind:

K1 Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A eintritt, ist größer gleich Null, d.h. $P(A) \geq 0$.

K2 Die Wahrscheinlichkeit, dass das sichere Ereignis eintritt ist eins, d.h. $P(\Omega) = 1$.

K3 Falls A und B sich ausschließende (disjunkte) Ereignisse sind, d.h. $A \cap B = \emptyset$, dann gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

Mathematische Beschreibung zufälliger Vorgänge

Kurzer Exkurs: Was sind Axiome?

- Axiome bilden das Rückgrat jeder mathematischen Disziplin.
- Axiome beinhalten Aussagen, die nicht begründet oder bewiesen werden.
- Ausgehend von einem Axiomensystem werden dann aber alle weiteren Aussagen bewiesen.
- Sinnvolle und konsistente Axiomensysteme zu postulieren gehört zu den schwierigsten Aufgaben in der Mathematik.
- Von den Anfängen der (modernen) Wahrscheinlichkeitsrechnung im 17. Jahrhundert (Briefwechsel von Blaise Pascal und Pierre de Fermat im Jahr 1654) dauerte es fast 300 Jahre, bis Kolmogorov im Jahr 1933 die axiomatischen Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie begründete.

Mathematische Beschreibung zufälliger Vorgänge

Frage: Wie kommt man zu Wahrscheinlichkeiten?

Antwort: Verschiedene Vorgehensweisen sind denkbar, nur die Axiome von Kolmogorov müssen erfüllt sein.

- **Objektivistischer (statistischer) Wahrscheinlichkeitsbegriff**
  Häufigkeitsinterpretation: Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit $f_n(A)$ des Ereignisses A in n Wiederholungen.

  $$P(A) = \lim_{n\to\infty} f_n(A),$$

  (Vgl. Definition 5.8 im Skriptum.)
- **Subjektiver Wahrscheinlichkeitsbegriff**
  Subjektive Bewertung von Wahrscheinlichkeiten, z.B. durch Experten.

Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Häufige Situation: Alle möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) sind **gleich wahrscheinlich**, d.h.

$$P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{|\Omega|}, j = 1, \ldots, n$$

In diesem Fall sprechen wir von einem **Laplace-Experiment**.

Abzählregel

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der für } A \text{ günstigen Ergebnisse}}{\text{Anzahl aller möglichen Ergebnisse}} = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

$|A|$ bezeichnet hier die Anzahl der Elemente in A, $|\Omega|$ die Anzahl der Elemente in Ω.

Grundbegriffe

Musteraufgabe – Würfelwurf

Ein Würfel wird einmal geworfen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gerade Augenzahl geworfen wird?

Lösung: Ergebnismenge $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Annahme: Alle Augenzahlen haben die **gleiche Wahrscheinlichkeit (Laplace-Experiment)**

$$\Longrightarrow P(\{k\}) = \frac{1}{6}$$

für alle Augenzahlen $k = 1, \cdots, 6$.

Ereignis $A =$ **gerade Augenzahl** $= \{2, 4, 6\}$

$$\Longrightarrow P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Laplace-Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Leibniz Irrtum

Wie groß ist beim zweimaligen Werfen eines sechsseitigen Würfels die Wahrscheinlichkeit für die Augensummen 11 und 12?

Lösung:

- Möglicher Ergebnisraum:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 12\}.$$

  Aber diese Ergebnisse sind **nicht** gleichwahrscheinlich.

- Alternativer Ergebnisraum:

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), \ldots, (6, 6)\}.$$

  Ω hat 36 mögliche und **gleichwahrscheinliche Ergebnisse**.

Laplace-Wahrscheinlichkeiten

2. Würfel **1. Würfel**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6
3	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
4	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6
5	5,1	5,2	5,3	5,4	5,5	5,6
6	6,1	6,2	6,3	6,4	6,5	6,6

Laplace Wahrscheinlichkeiten

Augensumme	Ergebnisse ω	Wahrscheinlichkeit
2	$\{(1,1)\}$	$1/36$
3	$\{(1,2),(2,1)\}$	$2/36$
4	$\{(1,3),(3,1),(2,2)\}$	$3/36$
5	$\{(1,4),(4,1),(2,3),(3,2)\}$	$4/36$
6	$\{(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3)\}$	$5/36$
7	$\{(1,6),(6,1),(2,5),(5,2),(3,4),(4,3)\}$	$6/36$
8	$\{(2,6),(6,2),(3,5),(5,3),(4,4)\}$	$5/36$
9	$\{(3,6),(6,3),(4,5),(5,4)\}$	$4/36$
10	$\{(4,6),(6,4),(5,5)\}$	$3/36$
11	$\{(5,6),(6,5)\}$	$2/36$
12	$\{(6,6)\}$	$1/36$

Die Wahrscheinlichkeit für die Augensumme 11 beträgt damit $\frac{2}{36}$ und die für die Augensumme 12 beträgt $\frac{1}{36}$.

Grundbegriffe

Musteraufgabe 5.5 – Würfelwurf

Ein Würfel mit den Augenzahlen $1, 2, \ldots, 6$ wird **zweimal** geworfen. Es sei X die Augenzahl des ersten Wurfs, Y jene des zweiten Wurfs. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für jene Teilmenge der Ergebnismenge, die dem Ereignis $\{X + Y < 4\}$ entspricht.

Lösung:

Ergebnismenge mit gleichwahrscheinlichen Ergebnissen:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\} \\
\text{Ereignis A} &= \{X + Y < 4\} = \{(1,1),(1,2),(2,1)\} \\
P(A) &= \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}
\end{aligned}$$

Grundbegriffe

Ereignisse sind Mengen.

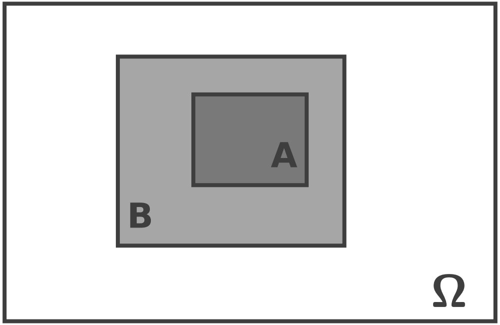
- $A \cup B =$ Menge aller Elemente, die zu A **oder** B gehören
  $\implies$ Ereignis A **oder** Ereignis B tritt ein.
- $A \cap B =$ Menge aller Elemente, die zu A **und** B gehören
  $\implies$ Ereignis A **und** Ereignis B treten ein.
- $\overline{A} =$ Menge aller Elemente, die **nicht** zu A gehören (wohl aber zu Ω)
  $\implies$ Ereignis A tritt **nicht** ein.
  Weitere Notationsmöglichkeiten für dieses sogenannte **Gegenereignis**: A' (Skriptum), A^c

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Teilmengen

Falls ein Ereignis A ein Spezialfall eines anderen Ereignisses B ist, d.h. $A \subset B$, dann gilt

$$\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B}).$$



Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Einmaliges Werfen eines sechsseitigen Würfels

Betrachte den Ergebnisraum $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit

$$P(\{1\}) = P(\{2\}) = \ldots = P(\{6\}) = \frac{1}{6}$$

und die Ereignisse

$$A = \text{Augenzahl } 6 = \{6\}, \quad B = \text{Gerade Augenzahl} = \{2, 4, 6\}.$$

Welches Ereignis ist wahrscheinlicher?

Lösung:

Es gilt $\mathbf{A} \subset \mathbf{B}$, also $\mathbf{P}(\mathbf{A}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{B})$, wie man auch wie folgt sieht:

$$P(A) = P(\{6\}) = \mathbf{\frac{1}{6}}, \quad P(B) = P(\{2, 4, 6\}) = \mathbf{\frac{3}{6}}.$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Nachbar

Betrachte die in der Einleitung diskutierten Ereignisse

$$\begin{aligned} A &= \text{Mein Nachbar steht wochentags immer um 2.00 Uhr} \\ & \text{in der Nacht auf.} \\ B &= \text{Mein Nachbar ist Bäcker und steht wochentags} \\ & \text{immer um 2.00 Uhr in der Nacht auf.} \end{aligned}$$

Welches Ereignis ist wahrscheinlicher?

Lösung:

Offenbar ist $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, so dass gemäß Regel $\mathbf{P}(\mathbf{B}) \leq \mathbf{P}(\mathbf{A})$ gilt, entgegen der Intuition vieler.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Gegenereignis

Für die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses $\overline{A}$ gilt

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Beispiel

Wie groß ist beim zweimaligen Würfeln die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, mindestens Augensumme 3 zu würfeln?

Lösung:

$$\begin{aligned} P(\text{mindestens Augensumme 3}) &= 1 - P(\text{Augensumme 2}) \\ &= 1 - \frac{1}{36} \\ &= \frac{35}{36} \end{aligned}$$

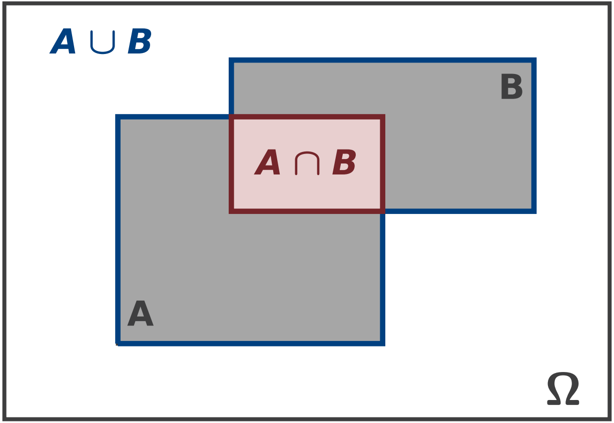
Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Vereinigung

Für zwei Ereignisse A und B gilt

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten



$$\mathbf{P}(\mathbf{A} \cup \mathbf{B}) = \mathbf{P}(\mathbf{A}) + \mathbf{P}(\mathbf{B}) - \mathbf{P}(\mathbf{A} \cap \mathbf{B})$$

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Wetter

Betrachte die drei Einschätzungen

- Die Wahrscheinlichkeit, dass es am Samstag regnet, ist 70%.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass es am Sonntag regnet, ist 70%.
- Die Wahrscheinlichkeit, dass es an beiden Tagen regnet, ist 30%.

Wie groß wäre demnach die Wahrscheinlichkeit, dass es am Samstag oder am Sonntag regnet?

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Lösung: Betrachte die beiden Ereignisse

$$A = \text{Regen am Samstag},$$
$$B = \text{Regen am Sonntag}.$$

Laut Angabe gilt

$$P(A) = \mathbf{0.7},\ P(B) = \mathbf{0.7},\ P(A \cap B) = \mathbf{0.3}.$$

Damit ist die Wahrscheinlichkeit für Regen am Samstag oder am Sonntag:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= 0.7 + 0.7 - 0.3 = \mathbf{1.1}. \end{aligned}$$

Interpretation: Die Axiome von Kolmogorov sind verletzt! Die ursprünglichen Einschätzungen sind widersprüchlich.

Rechnen mit Wahrscheinlichkeiten

Zusammenfassung der Rechenregeln für Wahrscheinlichkeiten

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. $P(A) \leq P(B)$, falls $A \subset B$
4. $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
5. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Kopplung von Ereignissen (Bedingte Wahrscheinlichkeit)

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: Würfeln.

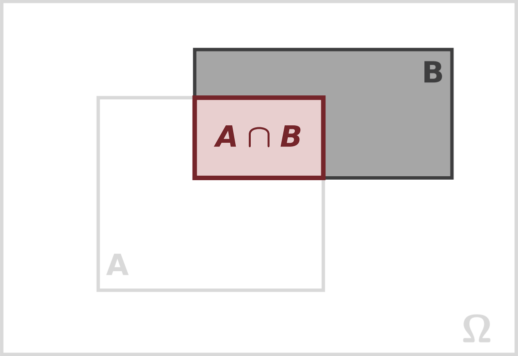
- Beim einmaligen Würfeln ist die Wahrscheinlichkeit für eine 6 gleich $\frac{1}{6}$.
- Für das Ereignis A = Augenzahl 6 gilt also

$$P(A) = \frac{1}{6}.$$

- Betrachte das Ereignis B = Gerade Augenzahl. Wenn wir die Zusatzinformation erhalten, dass eine gerade Augenzahl gewürfelt wurde, also das Ereignis B eingetreten ist, ändert sich unsere Einschätzung für die Augenzahl 6.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Wahrscheinlichkeiten sind proportional zur Fläche.
- Wenn B eingetreten, dann ist nur noch die Fläche B relevant.



$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Für

$$A = \text{Augenzahl ist } 6,$$
$$B = \text{Gerade Augenzahl.}$$

gilt also

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}.$$

Beachte, dass $P(B|A) \neq P(A|B)$, denn

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{6}} = 1.$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Seien $A, B \subseteq \Omega$ und $P(B) > 0$. Dann ist die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter B definiert als

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Interpretation:

- Ereignis A, das mit Wahrscheinlichkeit $P(A)$ eintritt.
  Zusatzinformation: Ereignis B ist eingetreten.
- Wie groß ist nun die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten von A, wenn das Ereignis B bereits eingetreten ist?
  (Welche Wahrscheinlichkeit hat A gegeben B?)

Produktformel: $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B)\,P(B)$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Beispiel: AMDS-Test

Die Krankheit AMDS (Acute Mathematics Deficiency Syndrom) verhindert, dass man ein Wirtschaftsstudium an der Universität Innsbruck erfolgreich abschließen kann. 5% aller Studierenden leiden an AMDS.

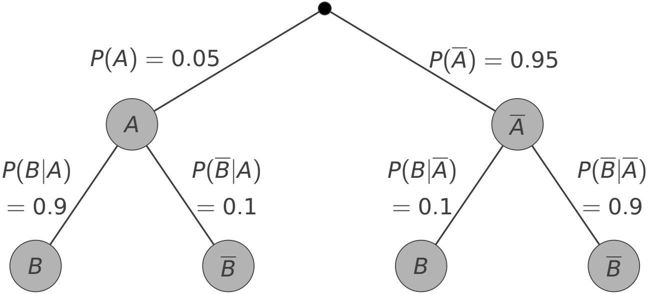
Es gibt einen Test, der diese Krankheit nachweisen kann: die Prüfung im Mathematik-Modul. Wer AMDS hat, wird mit 90%iger Sicherheit durchfallen – wer es nicht hat, wird mit 90%iger Sicherheit bestehen.

Das Unglück ist passiert: Ein Student ist in der Prüfung durchgefallen. Sollte er nun das Studium beenden?

Lösung: Notation für Ereignisse

A	$=$	AMDS (krank)	$\bar{A}$	$=$	kein AMDS (gesund)
B	$=$	in Prüfung durchfallen	$\bar{B}$	$=$	Prüfung bestehen

Bedingte Wahrscheinlichkeit



$$P(A \cap B) \ = \ P(B|A) \cdot P(A) \ = \ 0.9 \cdot 0.05 \ = \ 0.045$$
$$P(\overline{A} \cap B) \ = \ P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \ = \ 0.1 \cdot 0.95 \ = \ 0.095$$
$$P(A \cap \overline{B}) \ = \ P(\overline{B}|A) \cdot P(A) \ = \ 0.1 \cdot 0.05 \ = \ 0.005$$
$$P(\overline{A} \cap \overline{B}) \ = \ P(\overline{B}|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}) \ = \ 0.9 \cdot 0.95 \ = \ 0.855$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Eintragen in **Vierfeldertafel**:

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	

	B	$\overline{B}$	
A	0.045	0.005	0.05
$\overline{A}$	0.095	0.855	0.95
	0.140	0.860	1

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.045}{0.14} = 0.3214 \qquad P(\overline{A}|B) = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{0.095}{0.14} = 0.6786$$

- Wenn also ein Studierender durchgefallen ist (d.h. gegeben B), beträgt die Wahrscheinlichkeit AMDS zu haben (A) 32.14%.
- Mit 67.86% ist aber die Wahrscheinlichkeit bei negativer Prüfung (B) *kein* AMDS ($\overline{A}$) zu haben – und damit das Studium prinzipiell erfolgreich absolvieren zu können – immer noch mehr als doppelt so hoch.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Unser AMDS Problem war zwar ein künstliches Beispiel, aber:

- Die besprochene Problematik ist generell für **Eignungstests** bzw. für **diagnostische Tests** dieselbe, wie zum Beispiel für den zu Beginn erwähnten AIDS-Test ELISA, auf den wir noch zurückkommen werden.
- Die intuitiv angewandten Rechenregeln für die (bedingten) Wahrscheinlichkeiten sind ebenfalls allgemeingültig. Diese werden wir nun im folgenden zusammenfassen und noch einmal erklären.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Rechnen mit bedingten Wahrscheinlichkeiten

Für feste Bedingung B kann mit bedingten Wahrscheinlichkeiten genau so gerechnet werden wie mit unbedingten Wahrscheinlichkeiten, also

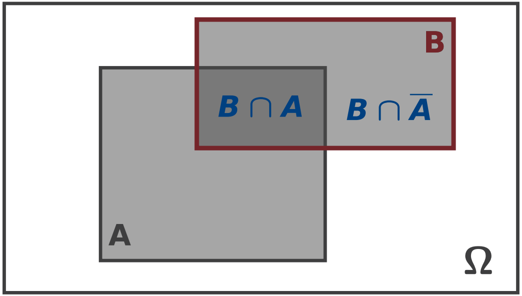
1. $0 \leq P(A|B) \leq 1$,
2. $P(\emptyset|B) = 0$,
3. $P(A|B) \leq P(C|B)$ falls $A \subseteq C$,
4. $P(A|B) = 1 - P(\overline{A}|B)$,
5. $P(A \cup C|B) = P(A|B) + P(C|B) - P(A \cap C|B)$.

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit

Gegeben seien zwei Ereignisse A und B. Dann gilt:

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A}).$$



$$\mathbf{P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A}) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}$$

Satz von Bayes

Satz von Bayes

Für zwei Ereignisse A und B gilt:

$$
\begin{aligned}
P(A|B) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \\
&= \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}
\end{aligned}
$$

Satz von Bayes

Mit Hilfe des Satzes von Bayes lösen wir nochmals das AMDS-Beispiel:

AMDS-Beispiel

Notation für die Ereignisse

A	=	AMDS (krank)	$\overline{A}$	=	kein AMDS (gesund)
B	=	in Prüfung durchfallen	$\overline{B}$	=	Prüfung bestehen

Wir kennen $P(A) = 0.05$, $P(B|A) = 0.9$, $P(\overline{B}|\overline{A}) = 0.9$.
Berechnen Sie $P(A|B)$.

Lösung: $P(A|B) = \dfrac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}$

$$= \frac{0.9 \cdot 0.05}{0.9 \cdot 0.05 + 0.1 \cdot 0.95} = 0.3214$$

Satz von Bayes

Beispiel: AIDS – Test

Der AIDS-Test ELISA erkennt einen mit HIV infizierten Patienten in 99.9% der Fälle. Umgekehrt klassifiziert der Test 99.8% der gesunden Menschen als gesund. In den Industrieländern sind 0.1% der Bevölkerung infiziert.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine positiv getestete Person gesund ist?

Lösung: Notation für die Ereignisse

$$\begin{array}{lcllcl} A & = & \text{Person nicht infiziert} & \overline{A} & = & \text{Person infiziert} \\ B & = & \text{Testergebnis positiv} & \overline{B} & = & \text{Testergebnis negativ} \end{array}$$

Aus der Angabe

$$P(\overline{A}) = 0.001,\ P(B|\overline{A}) = 0.999,\ P(\overline{B}|A) = 0.998.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $P(A|B)$.

Satz von Bayes

Lösung:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|\overline{A}) \cdot P(\overline{A})}$$
$$= \frac{0.002 \cdot 0.999}{0.002 \cdot 0.999 + 0.999 \cdot 0.001} = \mathbf{0.6667}.$$

Warum ist die Wahrscheinlichkeit für einen falsch positiven AIDS-Test so hoch?

- Die hohe Wahrscheinlichkeit für einen falsch positiven Test rührt von der sehr niedrigen Prävalenz von 0.1% der Bevölkerung in den Industrieländern (Suche nach der Nadel im Heuhaufen).
- Deshalb werden Vorsorgeuntersuchungen (etwa die Mammographie bei Brustkrebs) nur bei Risikogruppen (etwa Frauen ab 40) durchgeführt.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Kontingenztafel – Vierfeldertafel

Die Tabelle mit den Ereigniskombinationen wird mit entsprechenden Wahrscheinlichkeiten versehen.

An den Rändern der Tabelle werden die Wahrscheinlichkeiten für die Einzelereignisse eingetragen.

	B	$\overline{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \overline{B})$	$P(A)$
$\overline{A}$	$P(\overline{A} \cap B)$	$P(\overline{A} \cap \overline{B})$	$P(\overline{A})$
	$P(B)$	$P(\overline{B})$	1

Um die **Vierfeldertafel** vollständig auszufüllen, benötigt man **nur drei voneinander unabhängige** Angaben.

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Musteraufgabe 5.32 – Das typische Frauenauto ist klein und rosa

In einer in Deutschland 2013 durchgeführten Studie wurden Verhaltensunterschiede zwischen Männer und Frauen beim Kauf eines Neuwagens untersucht. Im Jahr 2013 wurden 24% der Neuwagen von Frauen erworben, 76% von Männern.
Das Augenmerk der Untersuchung galt unter anderem dem verbreiteten Vorurteil, Frauen würden Kleinwagen bevorzugen. Zu diesem Zweck wurden die PKWs eingeteilt in *Kleinwagen* und *Nicht-Kleinwagen* (Limousinen, Kombis, SUVs, usw.).
Es wurde festgestellt, dass immerhin 10% der Männer sich vorstellen können, einen Kleinwagen zu kaufen, während es bei Frauen 28% waren.

(a) Wieviel Prozent der verkauften PKWs sind Kleinwagen?

(b) Wieviel Prozent der Kleinwagenkäufer sind männlich?

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Lösung: Wir definieren die Ereignisse

$$K = \text{Kauf eines Kleinwagens}$$
$$M = \text{Käufer ist männlich}$$

Aus der Angabe wissen wir die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(\overline{M}) = 0.24, \quad P(M) = 1 - P(\overline{M}) = 0.76, \quad P(K|M) = 0.1, \quad P(K|\overline{M}) = 0.28$$

Weiters gilt:

$$P(K \cap M) = P(K|M) \cdot P(M) = 0.1 \cdot 0.76 = 0.076$$
$$P(K \cap \overline{M}) = P(K|\overline{M}) \cdot P(\overline{M}) = 0.28 \cdot 0.24 = 0.0672$$

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Vierfeldertafel

	M	$\overline{M}$	
K	0.0760	0.0672	0.1432
$\overline{K}$	0.6840	0.1728	0.8568
	0.7600	0.2400	1.0000

(a) $P(K) = 0.1432$

(b) $P(M|K) = \dfrac{P(M \cap K)}{P(K)} = \dfrac{0.0760}{0.1432} = 0.5307$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Unabhängigkeit

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn das Eintreten von B keine Information über die Wahrscheinlichkeit von A liefert, d.h. wenn

$$P(A) = P(A|B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Andernfalls sind die Ereignisse **stochastisch abhängig** (**gekoppelt**).

A und B sind **positiv abhängig** (positiv gekoppelt, begünstigen einander), wenn

$$P(A|B) > P(A) \quad \Leftrightarrow \quad P(B|A) > P(B)$$

A und B sind **negativ abhängig** (negativ gekoppelt, behindern einander), wenn

$$P(A|B) < P(A) \quad \Leftrightarrow \quad P(B|A) < P(B)$$

Unabhängigkeit von Ereignissen

Musteraufgabe 5.33 – Unfallstatistik

Von 1000 Verkehrsunfällen sind 280 tödlich verlaufen (Ereignis A) und 100 ereigneten sich bei einer Geschwindigkeit von mehr als 150 km/h (Ereignis B). 20 Unfälle verliefen nicht tödlich und ereigneten sich bei Geschwindigkeiten über 150 km/h.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Hochgeschwindigkeitsunfall tödlich verläuft?

(b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein tödlicher Unfall bei hoher Geschwindigkeit ereignet hat?

(c) Beurteilen Sie die Kopplung der Ereignisse A und B. Versuchen Sie eine kausale Interpretation der Kopplung.

Unabhängigkeit von Ereignissen

	B	$\overline{B}$	
A	80	200	280
$\overline{A}$	20	700	720
	100	900	1000

$\Longrightarrow$

	B	$\overline{B}$	
A	0.08	0.20	0.28
$\overline{A}$	0.02	0.70	0.72
	0.10	0.90	1.00

(a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0.08}{0.1} = 0.8$

(b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0.08}{0.28} = 0.2857$

(c) Positive Kopplung, weil $P(A|B) = 0.8 > 0.28 = P(A)$ und
$P(B|A) = 0.2857 > 0.10 = P(B)$

Vermutung: Hohe Geschwindigkeit (B) ist eine Ursache für den tödlichen Verlauf eines Unfalls (A). Dieser Schluss ist aber nicht zwingend.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Zufallsvariablen (Zufallsgrößen)

Was sind Zufallsvariablen (Zufallsgrößen)?

Zufallsvariablen

- Zufallsvariablen dienen der Beschreibung der Ergebnisse von Zufallsvorgängen durch Zahlen.
- Eine Zufallsvariable X ist eine in einem Zufallsvorgang beobachtbare zufällige Zahl.
- Jede Aussage über X stellt ein Ereignis dar.

Was sind Zufallsvariablen?

Beispiel: Zweimaliges Würfeln

Wie kann man die Augensumme der beiden Würfe beim zweimaligen Werfen eines Würfels durch eine Zufallsvariable beschreiben?

Lösung:

- $\Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$
- $X =$ Augensumme der beiden Würfe
- Wertebereich von X : $2,3,4,\ldots,12$
- $P(X=2) = P(\{(1,1)\}) = \frac{1}{36}$

  $P(X=3) = P(\{(1,2),(2,1)\}) = \frac{2}{36}$

  usw.

Was sind Zufallsvariablen?

Beispiel: Münzwurf

Wie kann man das zweimalige Werfen einer Münze durch eine Zufallsvariable beschreiben?

Lösung:

- $\Omega = \{(K,K),(K,Z),(Z,K),(Z,Z)\}$
- $X =$ Anzahl Kopf
- Wertebereich von $X: 0, 1, 2$
- $P(X=0) = P(\{(Z,Z)\}) = \mathbf{\frac{1}{4}}$
  $P(X=1) = P(\{(Z,K),(K,Z)\}) = \mathbf{\frac{1}{2}}$
  $P(X=2) = P(\{(K,K)\}) = \mathbf{\frac{1}{4}}$

Diskrete Zufallsvariablen

Benfords Gesetz

Simon Newcomb (1835–1909) und später Frank Benford (1883–1948) machten die verblüffende Entdeckung, dass die Anfangsziffern 1–9 von ganzen Zahlen in vielen Fällen nicht gleich häufig vorkommen. Am häufigsten ist die Anfangsziffer 1, am zweithäufigsten die Anfangsziffer 2 usw. Benford beschrieb also die Verteilung der Zufallsvariable

$$X = \text{Anfangsziffer von Zahlen.}$$

X kann die Werte $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ annehmen, also wieder nur **diskret** viele.

Diskrete Zufallsvariablen

Häufigkeit von bestimmten Ereignissen

Versicherungen interessieren sich für die Häufigkeiten, mit der bestimmte Ereignisse innerhalb eines Jahres auftreten:

$$\begin{aligned} X &= \text{Anzahl von Erdbeben} \\ Y &= \text{Anzahl von Unwettern} \end{aligned}$$

- X und Y können die Werte $0, 1, 2, 3, \ldots$ annehmen.
- X und Y nehmen also wieder **diskret** viele Werte an, der Wertebereich ist allerdings nicht nach oben begrenzt.
- Wir sagen X und Y haben einen **abzählbar unendlichen** Wertebereich.

Diskrete Zufallsvariablen

Diskrete Zufallsvariable

Eine Zufallsvariable X heißt **diskret**, wenn sie nur endlich oder abzählbar unendlich viele Werte $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ annehmen kann.
Die Menge der Werte $\tau = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots\}$ heißt **Wertemenge** oder **Träger** von X.

Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeitsfunktion

Die **Wahrscheinlichkeitsfunktion** $f(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X gibt für jeden Wert $x_1, x_2, \ldots$ die Wahrscheinlichkeiten $P(X = x_1), P(X = x_2), \ldots$ an, d.h.

$$\begin{aligned} f(x_1) &= P(X = x_1), \\ f(x_2) &= P(X = x_2), \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Kompakter: $$f(x_i) = P(X = x_i) \qquad i = 1, 2, \ldots$$

Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Münzwurf

Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion an für das Werfen einer fairen Münze.

Lösung:

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion $f(x)$ für X ist gegeben durch

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{für } x = 0 \quad \text{(Kopf)} \\ \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \quad \text{(Zahl)} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion wird auch häufig in Tabellenform angegeben:

x	0	1
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Diskrete ZV: Benfords Gesetz

Beispiel: Benfords Gesetz

Benford postulierte für die Zufallsvariable $X =$ Anfangsziffer von Zahlen die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x+1}{x}\right), & x = 1, \dots, 9 \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

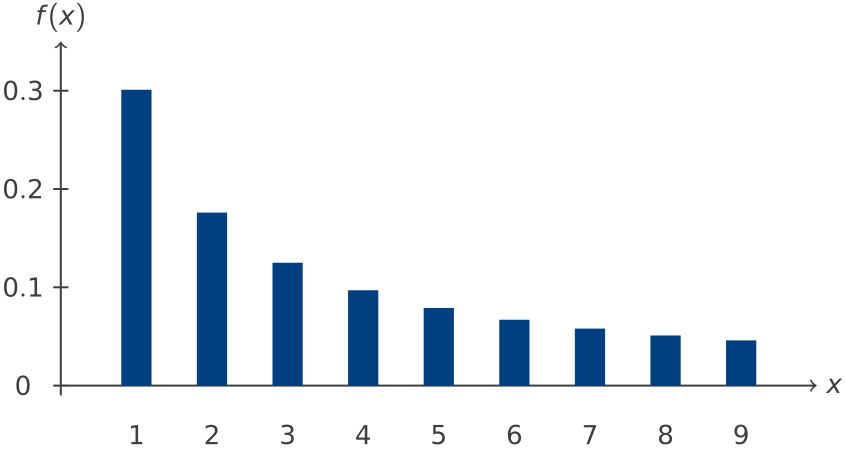
wobei $\log$ den Logarithmus zur Basis 10 bezeichnet.

Berechnen Sie die Werte der Wahrscheinlichkeitsfunktion.

Diskrete ZV: Benfords Gesetz

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} 0.301 & & x = 1 \\ 0.176 & & x = 2 \\ 0.125 & & x = 3 \\ 0.097 & & x = 4 \\ 0.079 & \text{für} & x = 5 \\ 0.067 & & x = 6 \\ 0.058 & & x = 7 \\ 0.051 & & x = 8 \\ 0.046 & & x = 9 \\ 0 & & \text{sonst} \end{cases}$$

Diskrete ZV: Benfords Gesetz



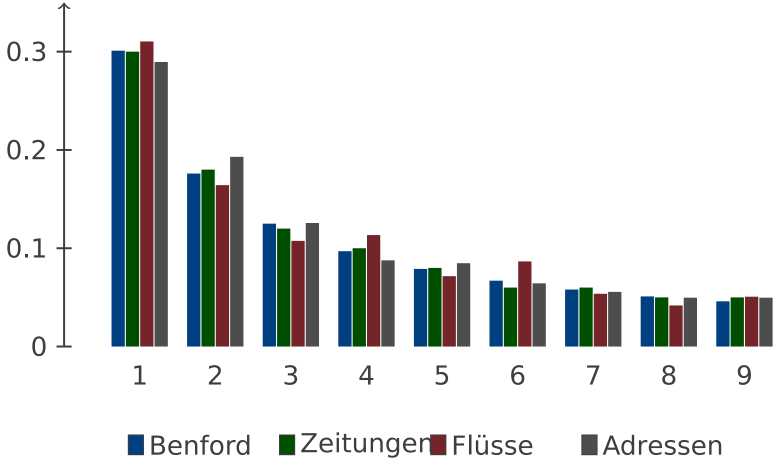
Diskrete ZV: Benfords Gesetz

Bemerkung: Benfords Gesetz beschreibt aus mathematischer Sicht also eine Wahrscheinlichkeitsfunktion oder -verteilung. Der Begriff wird auch benutzt für das Phänomen, dass viele empirische Daten dieser Verteilung folgen.

Historische Beispiele: Simon Newcomb beobachtete, dass in Büchern mit Logarithmentafeln frühere Seiten deutlich stärker abgenutzt waren als spätere. Frank Benford erhob als Beispiele die relativen Häufigkeiten der Anfangszahlen in einer Reihe von unterschiedlichen Quellen, u.a.:

- 100 Zahlen in Zeitungsausgaben,
- Tabelle mit Flächen von 335 Flüssen,
- Adressen von 342 in *American Men of Science* gelisteten Personen.

Diskrete ZV: Benfords Gesetz



Diskrete ZV: Benfords Gesetz

Beispiel: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Wie groß sind Benfords Gesetz zufolge die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass die erste Ziffer kleiner als 3 bzw. kleiner als 8 ist?

$$\begin{aligned}
P(\text{Erste Ziffer kleiner als 3}) &= P(X < 3) \\
&= f(1) + f(2) \\
&= \log\left(\frac{1+1}{1}\right) + \log\left(\frac{2+1}{2}\right) = \mathbf{0.477}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{Erste Ziffer kleiner als 8}) &= P(X < 8) \\
&= 1 - P(X \geq 8) \\
&= 1 - \log\left(\frac{8+1}{8}\right) - \log\left(\frac{9+1}{9}\right) = \mathbf{0.903}
\end{aligned}$$

Diskrete ZV: Benfords Gesetz

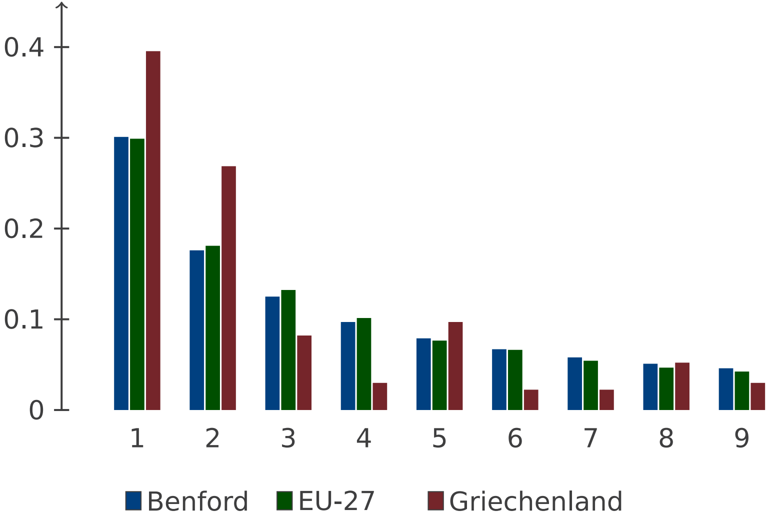
Anwendung: Aufdeckung von Betrug.

- Listen von Zahlen können durch Vergleich mit Benfords Gesetz auf Plausibilität geprüft werden.
- Bei großen Abweichungen folgt dann oft eine weitere inhaltliche Prüfung.
- Beispiele: Bilanzen, Steuererklärungen, Wahlergebnisse, Tabellen in wissenschaftlichen Publikationen.

Beispiel: Volkswirtschaftl. Gesamtrechnung und Euro-Stabilitätspakt.

- Hier: 156 jährliche Kennzahlen von Eurostat zu nationalem Defizit, Schulden, Bilanzen usw.
- Vergleich von insgesamt 39688 Kennzahlen für EU-27 Staaten 1999–2009 mit den 134 Kennzahlen für Griechenland im Jahr 2000.
- Griechische Kennzahlen mussten im Laufe der Euro-Einführung mehrfach korrigiert werden.
- Eurostat erst ab 2010 mit Möglichkeit zur direkten Prüfung.

Diskrete ZV: Benfords Gesetz



Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** $F(x)$ einer diskreten Zufallsvariable X gibt für jeden Wert $x \in \mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit für $X \leq x$ an, d.h.

$$F(x) = P(X \leq x).$$

- $F(x)$ lässt sich aus der Wahrscheinlichkeitsfunktion berechnen

$$F(x) = \sum_{i:x_i \leq x} f(x_i).$$

- Umgekehrt lässt sich mit $F(x)$ die Wahrscheinlichkeitsfunktion berechnen:

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= P(X \leq x_1) = F(x_1) \\
f(x_2) &= P(X \leq x_2) - P(X \leq x_1) = F(x_2) - F(x_1) \\
&\vdots \\
f(x_i) &= P(X \leq x_i) - P(X \leq x_{i-1}) = F(x_i) - F(x_{i-1})
\end{aligned}$$

Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

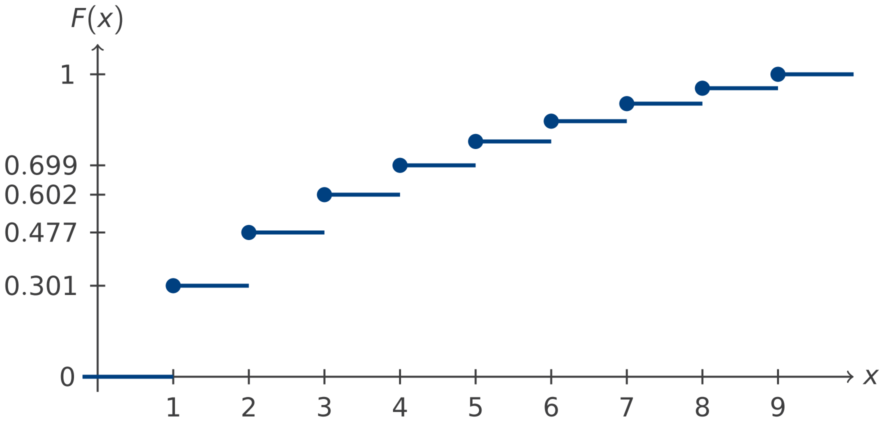
Beispiel: Benfords Gesetz

Geben Sie die Verteilungsfunktion für die Zufallsvariable $X =$ Anfangsziffer von Zahlen mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \begin{cases} \log\left(\frac{x+1}{x}\right), & x = 1, \ldots, 9 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

an und berechnen Sie damit $P(X \leq 6)$, $P(X < 6)$, $P(X \geq 6)$, $P(X > 6)$ und $P(X = 6)$.

Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten



Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 0.301, & 1 \leq x < 2 \\ 0.477, & 2 \leq x < 3 \\ 0.602, & 3 \leq x < 4 \\ 0.699, \quad \text{für} & 4 \leq x < 5 \\ 0.778, & 5 \leq x < 6 \\ 0.845, & 6 \leq x < 7 \\ 0.903, & 7 \leq x < 8 \\ 0.954, & 8 \leq x < 9 \\ 1, & x \geq 9 \end{cases}$$

Diskrete ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned}
P(X \leq 6) &= F(6) = \mathbf{0.845} \\
P(X < 6) &= F(5) = \mathbf{0.778} \\
P(X \geq 6) &= 1 - P(X < 6) = 1 - F(5) = \mathbf{0.222} \\
P(X > 6) &= 1 - P(X \leq 6) = 1 - F(6) = \mathbf{0.155} \\
P(X = 6) &= F(6) - F(5) = \mathbf{0.067}
\end{aligned}$$

Stetige Zufallsvariablen (Zufallsgrößen)

Stetige Zufallsvariablen (Zufallsgrößen)

Im Gegensatz zu diskreten Zufallsvariablen kann eine **stetige Zufallsvariable** jeden Wert in einem Intervall annehmen.

Die uns interessierenden Ereignisse sind von der Form

$$X \leq a, \; X > a, \; a < X \leq b$$

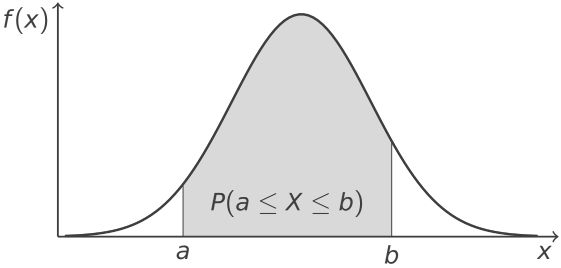
Typische Beispiele für Zufallsvorgänge, die durch stetige Zufallsvariablen beschrieben werden können:

- Mietspiegel: Nettomiete einer Wohnung
- Aktienkurse, Renditen
- Verlustverteilung bei Krediten
- usw.

Stetige Zufallsvariablen

Das Analogon zur Wahrscheinlichkeitsfunktion bei diskreten Zufallsvariablen ist die **Dichte** f einer stetigen Zufallsvariablen X. Es gilt:

$$\begin{aligned} P(a \leq X \leq b) &= \text{Fläche unterhalb der Dichte } f \text{ im Intervall } [a, b] \\ &= \int_a^b f(x)\, dx \end{aligned}$$



Stetige Zufallsvariablen

Stetige Zufallsvariablen und Dichten

Eine Zufallsvariable X heißt **stetig**, wenn es eine Funktion $f(x) \geq 0$ gibt, so dass für jedes Intervall $[a, b]$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx = \begin{array}{l}\text{Fläche zwischen } a \text{ und } b\\ \text{unter der Funktion } f\end{array}$$

gilt. Die Funktion $f(x)$ heißt **(Wahrscheinlichkeits-) Dichte** von X.

Für stetige Zufallsvariablen X gilt

$$P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b)$$

und $P(X = x) = 0$ für jedes $x \in \mathbb{R}$.

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Stückweise konstante Dichte

Betrachte die stetige Zufallsvariable X mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

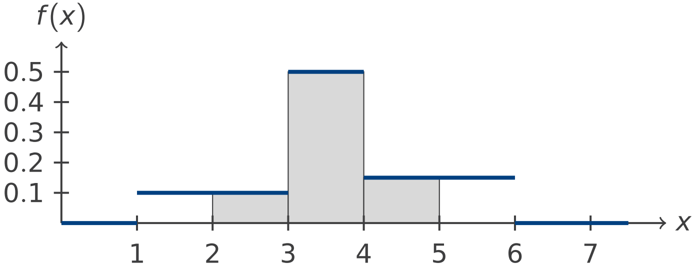
$$f(x) = \begin{cases} 0.1 & 1 \leq x < 3 \\ 0.5 & 3 \leq x < 4 \\ 0.15 & 4 \leq x < 6 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und berechnen Sie damit $P(2 \leq X \leq 5)$.

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Lösung:

Fläche lässt sich leicht über entsprechende Rechtecksflächen bestimmen:



$$P(2 \leq X \leq 5) = (3-2) \cdot 0.1 + (4-3) \cdot 0.5 + (5-4) \cdot 0.15 = \mathbf{0.75}$$

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Neues Produkt

Die Absatzmenge A eines neuen Produkts ist unsicher. Folgende Wahrscheinlichkeitsaussagen durch Experten sind gegeben:

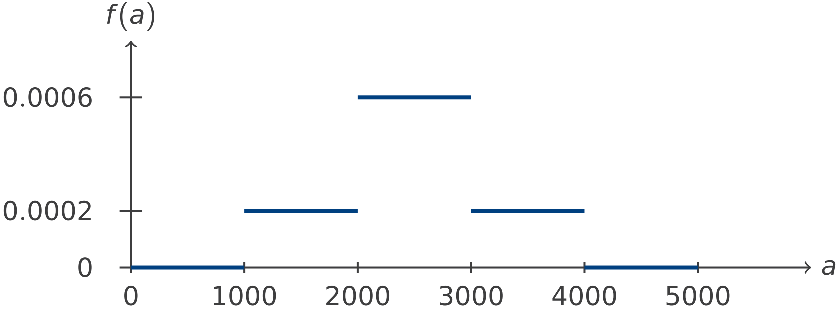
Absatzmenge A	1000 – 2000	2000 – 3000	3000 – 4000
Wahrscheinlichkeit	0.2	0.6	0.2

$$\text{Also:} \quad \begin{aligned} P(1000 \leq A \leq 2000) &= 0.2 \\ P(2000 \leq A \leq 3000) &= 0.6 \\ P(3000 \leq A \leq 4000) &= 0.2 \end{aligned}$$

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten $P(1000 \leq A \leq 2500)$ und $P(2500 < A \leq 4000)$.

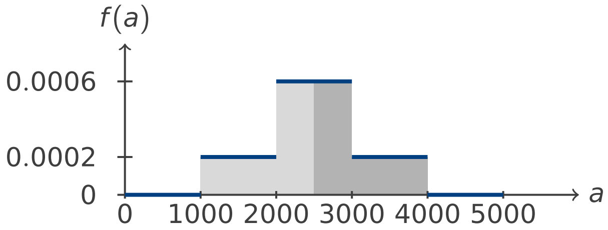
Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Lösung:



$$f(a) = \begin{cases} \frac{0.2}{1000} = \mathbf{0.0002}, & 1000 \leq a \leq 2000 \\ \frac{0.6}{1000} = \mathbf{0.0006}, \quad \text{für} & 2000 \leq a \leq 3000 \\ \frac{0.2}{1000} = \mathbf{0.0002}, & 3000 \leq a \leq 4000 \end{cases}$$

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten



$$
\begin{aligned}
P(1000 \leq A \leq 2500) &= (2000 - 1000) \cdot 0.0002 + (2500 - 2000) \cdot 0.0006 \\
&= \mathbf{0.5} \\
P(2500 < A \leq 4000) &= 1 - P(1000 \leq A \leq 2500) \\
&= 1 - 0.5 \\
&= \mathbf{0.5}
\end{aligned}
$$

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Verteilungsfunktion

Die **Verteilungsfunktion** einer stetigen Zufallsvariable ist gegeben durch

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Berechnung von Wahrscheinlichkeiten:

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a), \;\; P(X \geq a) = 1 - F(a)$$

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Exponentialverteilung

Eine wichtige stetige Verteilung ist die Exponentialverteilung. Die Dichte der Exponentialverteilung ist gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} \exp(-\frac{1}{\mu}x) & x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Kurz: $X \sim Expo(\mu)$.

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Anwendungsbeispiele:

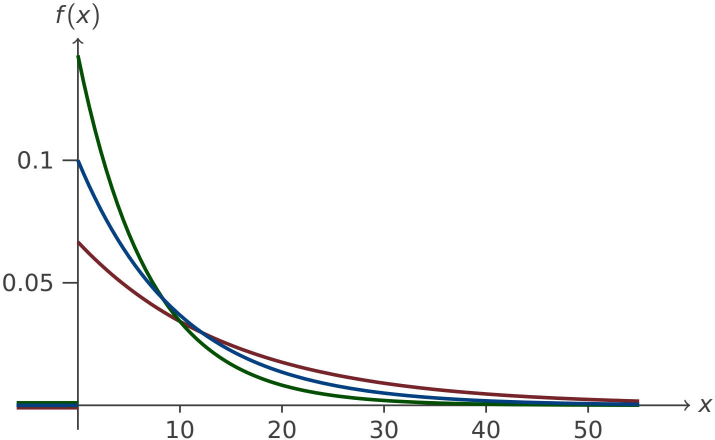
- $X =$ Wartezeit im Callcenter
- $X =$ Wartezeit an einer Attraktion im Freizeitpark
- $X =$ Dauer der Fahrt zum Arbeitsplatz
- $X =$ Überlebenszeit eines technischen Bauteils

Der Parameter μ kann dann weiter interpretiert werden als:

- $\mu =$ Durchschnittliche Wartezeit
- $\mu =$ Durchschnittliche Fahrtdauer
- $\mu =$ Durchschnittliche Überlebenszeit

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Exponentialverteilung mit $\mu = \mathbf{10}, \mathbf{7}, \mathbf{15}$



Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Beispiel: Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung

Bestimme die Verteilungsfunktion der $Expo(\mu)$ Verteilung.

Lösung:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{1}{\mu}\exp(-\frac{1}{\mu}x) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \int\limits_0^x \frac{1}{\mu}\exp(-\frac{1}{\mu}t)\,dt & x \geq 0 \end{cases}$$

Stetige ZV: Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Damit berechnen wir nun für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_0^x \frac{1}{\mu} \exp\left(-\frac{1}{\mu}t\right)\, dt \\
&= \frac{1}{\mu} \cdot \left[\frac{1}{-\frac{1}{\mu}} \exp\left(-\frac{1}{\mu}t\right)\right]_0^x \\
&= \left[-\exp\left(-\frac{1}{\mu}t\right)\right]_0^x \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{1}{\mu}x\right)
\end{aligned}$$

Stetige ZV: Quantile

Fahrzeit zur Uni mit dem Auto

Die Fahrzeit in Minuten zur Uni sei exponentialverteilt mit durchschnittlicher Fahrzeit $\mu = 10$ Minuten.

(a) Berechne zunächst die Wahrscheinlichkeit für eine Fahrzeit

- kleiner oder gleich 10 Minuten.
- kleiner als 10 Minuten.
- gleich 10 Minuten.
- größer als 10 Minuten.
- zwischen 5 und 15 Minuten.

(b) Sie fahren sicherheitshalber 20 Minuten vor Vorlesungsbeginn los. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit zu spät zu kommen?

(c) Mit bis zu welcher Fahrzeit rechnen Sie in 80% ihrer Fahrten?

Stetige ZV: Quantile

Lösung:

(a) Die Verteilungsfunktion $F(x)$ ist gegeben durch

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 - \exp(-\frac{1}{10}x) & x \geq 0. \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
P(\text{Fahrzeit kleiner gleich 10 Min.}) &= P(X \leq 10) \\
&= F(10) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{1}{10}10\right) = \mathbf{0.63} \\
P(\text{Fahrzeit kleiner 10 Min.}) &= P(X < 10) \\
&= F(10) = \mathbf{0.63} \\
P(\text{Fahrzeit gleich 10 Min.}) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Stetige ZV: Quantile

$$
\begin{aligned}
P(\text{Fahrzeit größer 10 Min.}) &= P(X > 10) \\
&= 1 - P(X \leq 10) \\
&= 1 - F(10) \\
&= 1 - 0.63 \;=\; \mathbf{0.37} \\
P(\text{Fahrzeit zw. 5 u. 15 Min.}) &= P(5 \leq X \leq 15) \\
&= P(X \leq 15) - P(X < 5) \\
&= F(15) - F(5) \\
&= \left\{1 - \exp\left(-\frac{15}{10}\right)\right\} - \left\{1 - \exp\left(-\frac{5}{10}\right)\right\} \\
&= 0.776 - 0.393 \;=\; \mathbf{0.383}
\end{aligned}
$$

Stetige ZV: Quantile

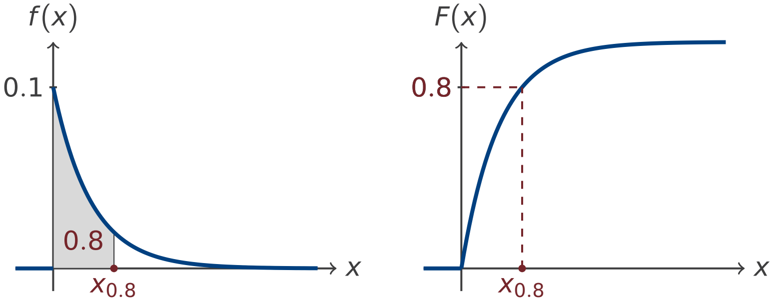
(b) Die Wahrscheinlichkeit, dass wir zu spät kommen, falls wir 20 Minuten vor Vorlesungsbeginn losfahren, ist

$$
\begin{aligned}
P(X > 20) &= 1 - F(20) \\
&= \exp\left(-\frac{1}{10} 20\right) \\
&= \mathbf{0.135}.
\end{aligned}
$$

Selbst wenn wir die zweifache durchschnittliche Fahrzeit einplanen, kommen wir also immer noch mit einer Wahrscheinlichkeit von **13.5%** zu spät!

Stetige ZV: Quantile

(c) Hier wissen wir nun die Wahrscheinlichkeit (80%) und suchen jenen Wert $x_{0.8}$ der Zufallsvariable X, so dass $P(X \leq x_{0.8}) = 0.8$.



Man nennt $x_{0.8}$ das 0.8-Quantil von X.
Dieses unterteilt den Wertebereich von X so, dass links von $x_{0.8}$ 80% der Wahrscheinlichkeitsmasse liegen und rechts davon 20%.

Stetige ZV: Quantile

Wir berechnen nun das Quantil $x_{0.8}$ explizit:

$$\begin{aligned}
0.8 &= P(X \leq x_{0.8}) \Leftrightarrow \\
0.8 &= 1 - \exp\left(-\frac{1}{10}x_{0.8}\right) \Leftrightarrow \\
\ln(0.2) &= -\frac{1}{10}x_{0.8} \Leftrightarrow \\
x_{0.8} &= \mathbf{16.09438}
\end{aligned}$$

Somit sind also 80% der Fahrten zur Uni kürzer als 16.09 Minuten.

Die Berechnung der noch extremeren Quantile $x_{0.9} = 23.02$ und $x_{0.99} = 46.05$ offenbart nochmal die bereits vorher festgestellte hohe Variabilität der Fahrzeit. Das 99%-Quantil besagt beispielsweise, dass wir ca. 46 Minuten vor einer Vorlesung losfahren müssen, um in nur 1% der Fälle zu spät zu kommen.

Stetige ZV: Quantile

Quantil einer Zufallsvariable

Die Zahl x_α, wobei $0 < \alpha < 1$, heißt **α-Quantil** einer Zufallsvariable X, falls

$$F(x_\alpha) = P(X \leq x_\alpha) = \alpha.$$

$x_{0.5} = x_{med}$ wird auch als **Median** bezeichnet.

Das α-Quantil ist eindeutig, falls $F(x)$ streng monoton ist.

Lineare Transformation:

Für $Y = a \cdot X + b$ mit $a > 0$ gilt $y_\alpha = a \cdot x_\alpha + b$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Erwartungswert

Der Begriff des Erwartungswerts

- Ein Zufallsexperiment wird häufig wiederholt.
- Beobachtete Ausgänge $a_1, a_2, \ldots, a_n$ der Zufallsvariablen X.
- Berechnen des **Mittelwerts** $\overline{x} = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

  Für viele Beobachtungen nähert sich $\overline{x}$ einem festen Wert, wenn die Wiederholungen des Experiments voneinander unabhängig sind und unter identischen Bedingungen erfolgen.

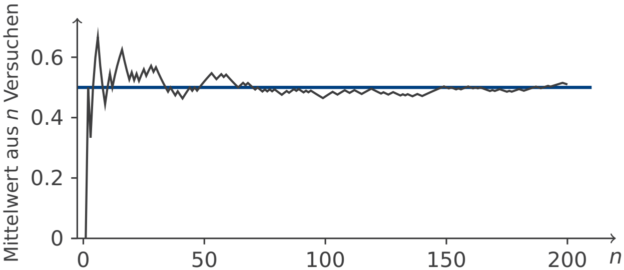
  Der Grenzwert ist der **langfristige Durchschnitt** der zufälligen Werte von X, genauer der **Erwartungswert** $E(X)$ von X (Gesetz der großen Zahlen).

Der Begriff des Erwartungswerts

Beispiel: Wurf einer (fairen) Münze. $n = 7$ Würfe führen zu Ergebnissen K, Z, K, Z, Z, Z, K. Die Zufallsvariable X nimmt den Wert 0 bei Kopf und 1 bei Zahl an, damit erhalten wir

$$\overline{x} = \frac{0+1+0+1+1+1+0}{7} = 0.5714286.$$

Man geht davon aus, dass $\lim_{n\to\infty} \bar{x} = \frac{1}{2} = E(X)$.



Erwartungswert einer diskreten ZV

Satz 5.42: Erwartungswert einer diskreten Zufallsvariable

Der **Erwartungswert** einer diskreten Zufallsvariable X mit den Werten $x_1, \dots, x_k$ ist

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_k \cdot P(X = x_k).$$

Falls X abzählbar unendlich viele Werte $x_1, \dots, x_k, \dots$ annimmt, gilt

$$\mu = E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + \ldots + x_k \cdot P(X = x_k) + \ldots$$

Für unendliche Träger $\{x_1, \dots, x_k, \dots\}$, z.B. $\mathbb{N}$, ist $E(X)$ eine unendliche Summe. Diese Summe muss nicht endlich sein. Der Erwartungswert existiert dann nicht.

Erwartungswert einer diskreten ZV

Musteraufgabe 5.43 – Würfelwurf

Was ist die erwartete Augenzahl beim Werfen eines Würfels?

Lösung: $X =$ Augenzahl, $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot P(X = 1) + \ldots + 6 \cdot P(X = 6) \\ &= \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 3.5 \end{aligned}$$

Erwartungswert einer diskreten ZV

Beispiel: Gewinnspiel

Ein Teilnehmer einer Spielshow im Fernsehen hat die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten: Einstreichen eines sicheren Gewinns von 110 Euro oder Teilnahme an einem Glücksspiel mit zufälligem Gewinn G. Die Zufallsvariable G hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

g	30	60	100	150	200
$P(G = g)$	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

Nach der **Erwartungswerttheorie** entscheidet sich der Teilnehmer so, dass der erwartete Gewinn maximiert wird.
Für welche der beiden Varianten (sichere Auszahlung oder Glücksspiel) entscheidet sich der Teilnehmer?

Erwartungswert einer diskreten ZV

Lösung:

g	30	60	100	150	200
$P(G=g)$	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

$$\begin{aligned} E(G) &= 30 \cdot P(G=30) + 60 \cdot P(G=60) + 100 \cdot P(G=100) + \\ &\quad + 150 \cdot P(G=150) + 200 \cdot P(G=200) \\ &= 30 \cdot 0.1 + 60 \cdot 0.1 + 100 \cdot 0.4 + 150 \cdot 0.2 + 200 \cdot 0.2 \\ &= \mathbf{119} > 110 \end{aligned}$$

Da der erwartete Gewinn größer ist als die sichere Auszahlung, entscheiden wir uns für das Gewinnspiel.

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable

Erwartungswert einer stetigen Zufallsvariable

Der **Erwartungswert** einer stetigen Zufallsvariable X mit Dichte $f(x)$ ist definiert als

$$\mu = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx.$$

Wie bei diskreten Zufallsvariablen kann der Erwartungswert nicht existieren, wenn obiges Integral unendlich wird.

Erwartungswert einer stetigen ZV

Erwartungswert einer stetigen gleichverteilten Zufallsvariablen

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X, die im Intervall $[a, b]$ gleichverteilt ist d.h. mit der Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(b-a)} & a \leq x \leq b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Verwenden Sie dazu $a = 3$ und $b = 7$.

Lösung:

$$\mu = E(X) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \;=\; \int_{3}^{7} x\, \frac{1}{4}\, dx = \left[\frac{1}{8}x^2\right]_3^7 = \frac{40}{8} = 5$$

Erwartungswert einer stetigen ZV

Beispiel: Neues Produkt

Die Absatzmenge A eines neuen Produkts ist unsicher mit stückweise konstanter Dichte

$$f(a) = \begin{cases} 0.0002 & 1000 \leq a < 2000 \\ 0.0006 \quad \text{für} & 2000 \leq a < 3000 \\ 0.0002 & 3000 \leq a \leq 4000 \end{cases}$$

Bestimmen Sie den erwarteten Absatz.

Lösung:

Der Erwartungswert ist das gewichtete Mittel der jeweiligen Intervallmitten mit den Wahrscheinlichkeiten im Intervall:

$$E(A) = 1500 \cdot 0.2 + 2500 \cdot 0.6 + 3500 \cdot 0.2 = \mathbf{2500}$$

Eigenschaften des Erwartungswerts

Eigenschaften des Erwartungswerts

1. Lineare Transformationen: $Y = aX + b$

$$E(Y) = aE(X) + b$$

2. Nichtlineare Transformationen: $Y = g(X)$
   Falls X diskret ist, dann gilt

$$E(Y) = g(x_1)P(X = x_1) + \dots + g(x_k)P(X = x_k) + \dots$$

   Falls X stetig ist, gilt

$$E(Y) = \int g(x)f(x)dx.$$

   Vorsicht: Im Allgemeinen ist $E[g(X)] \neq g(E[X])$.

Erwartungswert

Beispiel: Neues Produkt (Fortsetzung)

Bei der Herstellung des neuen Produkts fallen fixe Kosten in Höhe von 3000 GE und variable Kosten von 7 GE pro Stück an. Wie hoch sind die erwarteten Kosten?

Lösung:

Die Kosten K sind eine lineare Transformation der Absatzmenge A:

$$K = 7 \cdot A + 3000.$$

Somit betragen die erwarteten Kosten:

$$\begin{aligned} E(K) &= E(7 \cdot A + 3000) \\ &= 7 \cdot E(A) + 3000 \\ &= 7 \cdot 2500 + 3000 \\ &= 20500 \end{aligned}$$

Erwartungswert

Beispiel: Gewinnspiel

Ein Teilnehmer einer Spielshow im Fernsehen hat die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten: Einstreichen eines sicheren Gewinns von 110 Euro oder Teilnahme an einem Glücksspiel mit zufälligem Gewinn G. Die Zufallsvariable G hat folgende Wahrscheinlichkeitsfunktion:

g	30	60	100	150	200
$P(G = g)$	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

Nach der **Erwartungsnutzentheorie** entscheidet sich der Teilnehmer so, dass der erwartete Nutzen maximiert wird.
Für welche Variante fällt die Entscheidung, falls die Nutzenfunktion $U(g) = \ln(g)$ vorliegt?

Erwartungswert

Lösung:

g	30	60	100	150	200
$P(G = g)$	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

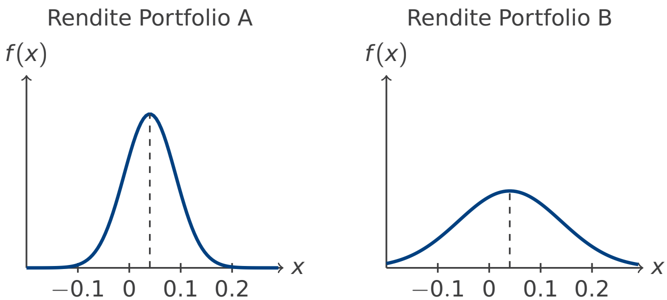
$$
\begin{aligned}
E(U(G)) &= 0.1 \cdot \ln(30) + 0.1 \cdot \ln(60) + 0.4 \cdot \ln(100) + \\
&\quad 0.2 \cdot \ln(150) + 0.2 \cdot \ln(200) \\
&= 0.1 \cdot 3.4 + 0.1 \cdot 4.09 + 0.4 \cdot 4.61 + 0.2 \cdot 5.01 + 0.2 \cdot 5.30 \\
&= \mathbf{4.65} < \ln(110) = 4.70
\end{aligned}
$$

Da der erwartete Nutzen kleiner ist als der Nutzen der sicheren Auszahlung, entscheiden wir uns für die sichere Auszahlung.
Außerdem ist erwartete Nutzen kleiner als der Nutzen des Erwartungswerts $U(E(G)) = \ln(119) = 4.78$.

Wahrscheinlichkeitsrechnung

Varianz

Idee der Varianz



- Betrachte die Renditeverteilung zweier Portfolios A und B.
- In beiden Fällen ist die erwartete Rendite gleich 0.04 (also 4%).
- Bei Portfolio *B* ist die Streuung um den Erwartungswert und damit die Risiken/Chancen deutlich höher als bei A.
- Die Varianz (im Finanzmarktbereich auch als Volatilität bekannt) ist ein Maß für die Streuung der Verteilung um den Erwartungswert.

Die Varianz einer Zufallsvariablen

Definition 5.49: Varianz

Es sei X eine Zufallsvariable und μ ihr Erwartungswert. Der Erwartungswert der Zufallsvariable $(X-\mu)^2$ heißt **Varianz** der Zufallsvariable, also

$$V(X) = E((X-\mu)^2) = \sigma^2$$

Die Wurzel $\sigma = \sqrt{V(X)}$ wird als **Standardabweichung** von X bezeichnet.

Die Varianz einer Zufallsvariablen

Satz 5.50: Berechnung der Varianz

Es sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und Varianz $V(X)$. Dann gilt:

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2$$

Musteraufgabe 5.51 – Würfelwurf

Berechnen Sie die Varianz der Augenzahl beim Werfen eines Würfels.

Lösung: Wir wissen bereits, dass $\mu = E(X) = 3.5$.

$$E(X^2) = \frac{1}{6}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2\right) = 15.1667$$

$$V(X) = E(X^2) - \mu^2 = 15.1667 - (3.5)^2 = 2.9167$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.7078$$

Varianz

Beispiel: Gewinnspiel

Ein Teilnehmer einer Spielshow hat die Wahl zwischen einem sicheren Gewinn von 110 Euro oder Teilnahme an einem Glücksspiel mit zufälligem Gewinn G.

g	30	60	100	150	200
$P(G=g)$	0.1	0.1	0.4	0.2	0.2

Wie entscheidet sich der Teilnehmer, wenn er eine vom Erwartungswert μ und der Standardarbweichung σ abhängende Präferenzfunktion $h(\mu,\sigma)$ maximiert? Bspw.

$$h(\mu,\sigma) = \begin{cases} \mu+\sigma & \text{risikofreudiger Spieler,} \\ \mu & \text{risikoneutraler Spieler,} \\ \mu-\sigma & \text{risikoaverser Spieler.} \end{cases}$$

Varianz

Lösung:

- Für die sichere Auszahlung ist die Varianz 0.
- Für das Glückspiel erhalten wir

$$
\begin{aligned}
E(G^2) &= 30^2P(G=30)+60^2P(G=60)+100^2P(G=100)+\\
&\quad 150^2P(G=150)+200^2P(G=200)\\
&= 30^2\cdot 0.1+60^2\cdot 0.1+100^2\cdot 0.4+150^2\cdot 0.2+200^2\cdot 0.2\\
&= 16950,\\
V(G) &= E(G^2)-(E(G))^2 = 16950-119^2 = 2789,\\
\sigma(G) &= \sqrt{2789} = 52.81.
\end{aligned}
$$

- Die Standardabweichung um den erwarteten Gewinn von 119 Euro ist also $\sigma(G) = 52.81$ Euro.

Varianz

- Damit erhalten wir

$$h(\mu, \sigma) = \begin{cases} 119 + 52.81 = 171.81 & \text{risikofreudiger Spieler,} \\ 119 & \text{risikoneutraler Spieler,} \\ 119 - 52.81 = 66.19 & \text{risikoaverser Spieler.} \end{cases}$$

- Für die risikolose Auszahlung gilt $g = 110$, so dass sich risikofreudige und risikoneutrale Spieler für das Glücksspiel entscheiden würden. Ein risikoaverser Spieler würde die sichere Auszahlung bevorzugen.

Eigenschaft der Varianz

Satz 5.54: Varianz einer linearen Funktion

Es sei X eine Zufallsvariable mit der Varianz $V(X)$. Dann gilt:

$$V(aX + b) = a^2 V(X) \qquad \text{für alle } a, b \in \mathbb{R}$$

Begründung:

$$V(aX + b) = E\left[(aX + b - E(aX + b))^2\right] = E\left[(aX - aE(X))^2\right]$$

$$= a^2 E(X - E(X))^2 = a^2 V(X)$$

Die Varianz von Zufallsvariablen

Musteraufgabe 5.55 – Kostenmodell

Ein Produktionsunternehmen arbeitet mit monatlichen Fixkosten von 1000 GE und variablen Stückkosten von 5 GE. Die monatliche Produktion ist eine Zufallsgröße mit der Standardabweichung von 20 Stück. Man finde die Varianz und die Standardabweichung der monatlichen Kosten.

Lösung: $X =$ monatliche Produktion, $Y =$ monatliche Kosten

$$Y = 1000 + 5X$$

$$V(Y) = V(1000 + 5X) = 5^2 \cdot V(X) = 25 \cdot 20^2 = 10000$$

Standardabweichung $\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = \sqrt{10000} = 100$.

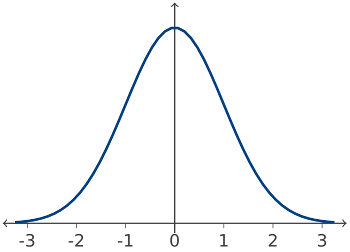
Wahrscheinlichkeitsrechnung

Normalverteilung

Standardnormalverteilung

Dichte der Standardnormalverteilung

$$f(x) = \phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$



Beachte: Da die Standardnormalverteilung eine der bedeutendsten Verteilungen ist, erhält ihre **Dichtefunktion** und ihre **Verteilungsfunktion** ein eigenes Symbol: $\phi(x)$ und $\Phi(x)$.

Standardnormalverteilung

Standardnormalverteilung

Die Zufallsvariable Z ist **standardnormalverteilt**, wenn für jedes Intervall $(a, b]$ die Wahrscheinlichkeit $P(a < Z \leq b)$ mit dem Flächeninhalt zwischen a und b unter der Dichte der Standardnormalverteilung übereinstimmt.

$$P(a < Z \leq b) = \int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x = \Phi(b) - \Phi(a)$$

dabei bezeichnet $\Phi(x) = P(Z \leq x)$ die **Verteilungsfunktion**.

Bemerkungen:

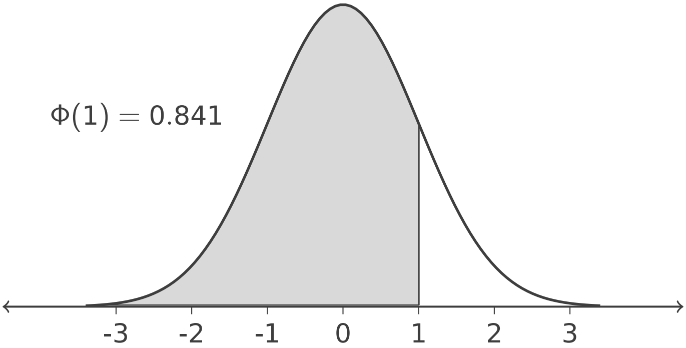
- Die Verteilungsfunktion $\Phi(x)$ hat keine einfache Darstellung.
- In der Praxis wird sie deshalb mit Computerprogrammen berechnet.
- In Lehrveranstaltungen ohne Computer werden auch Tabellen verwendet.

Standardnormalverteilung

Beispiel:

$$P(-2 < Z \leq 1)$$

$$\Phi(1) = 0.841$$

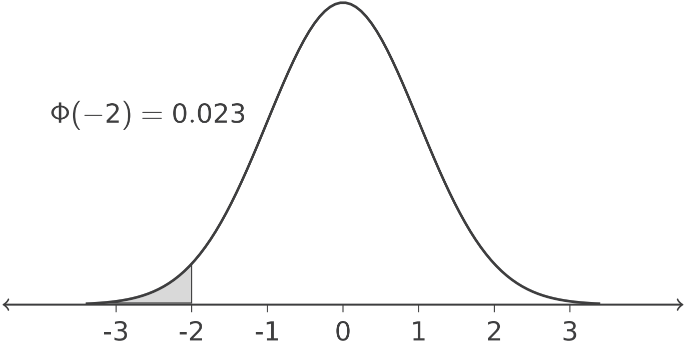


Standardnormalverteilung

Beispiel:

$$P(-2 < Z \leq 1)$$

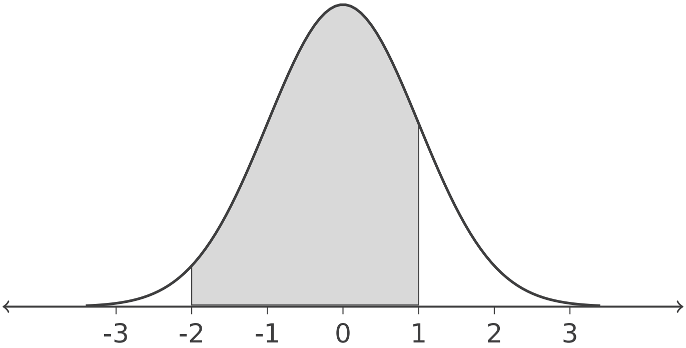
$$\Phi(-2) = 0.023$$



Standardnormalverteilung

Beispiel:

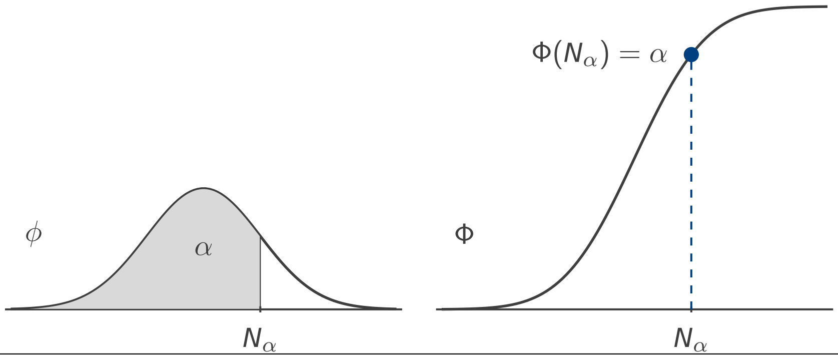
$$
\begin{aligned}
P(-2 < Z \leq 1) &= \Phi(1) - \Phi(-2) \\
&= 0.841 - 0.023 = 0.818
\end{aligned}
$$



Standardnormalverteilung

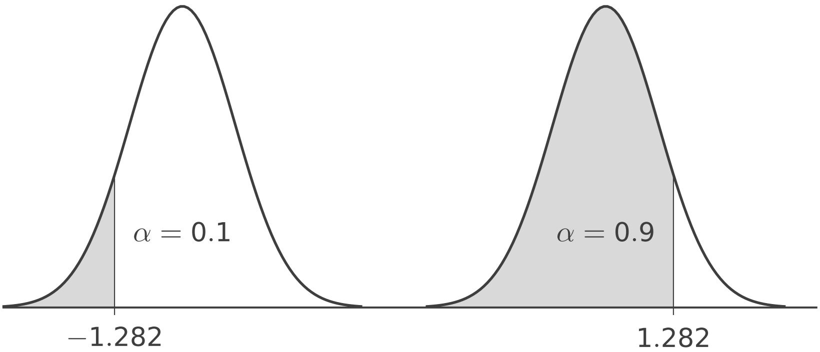
Definition 5.64: α-Quantil

Es sei $\alpha \in (0,1)$. Das α-Quantil $N_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ der Standardnormalverteilung erfüllt die Gleichung $P(Z \leq N_\alpha) = \alpha$.



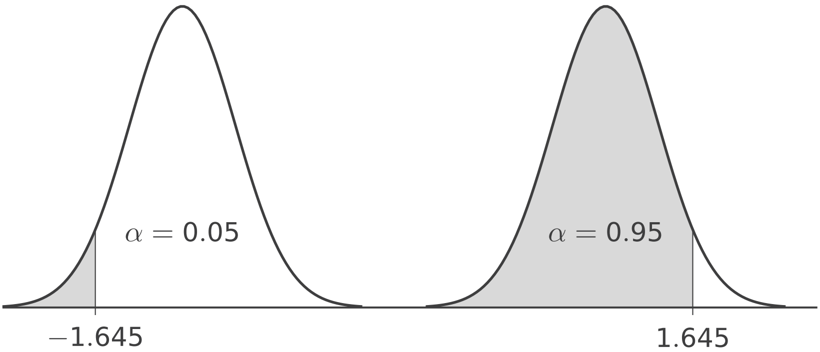
Standardnormalverteilung

Die Quantile $N_{0.1}$ und $N_{0.9}$



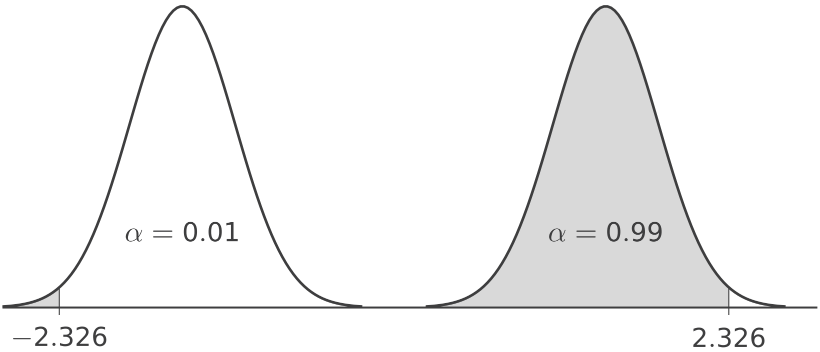
Standardnormalverteilung

Die Quantile $N_{0.05}$ und $N_{0.95}$



Standardnormalverteilung

Die Quantile $N_{0.01}$ und $N_{0.99}$



Standardnormalverteilung

Beispiel: Value at risk

Die Rendite R (in Prozent) eines Portfolios von Wertpapieren sei standardnormalverteilt.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rendite kleiner als 2% ist? Gesucht ist also $P(R < 2)$.
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Verlust größer als 1% ist? Gesucht ist also $P(R < -1)$.

Lösung:

Da gilt, dass $R \sim N(0, 1)$, können wir wieder die Verteilungsfunktion Φ verwenden:

1. $P(R < 2) = \Phi(2) = \mathbf{0.9772}$
2. $P(R < -1) = \Phi(-1) = 1 - \Phi(1) = \mathbf{0.1587}$

Standardnormalverteilung

Musteraufgabe 5.63

Berechnen von Wahrscheinlichkeiten mittels Tabelle aus der Formelsammlung.

Die Zufallsgröße Z ist standardnormalverteilt. Berechnen Sie

$$(1)\ P\big(Z \leq 1\big), \quad (2)\ P\big(Z > -1\big), \quad (3)\ P\big(-2 \leq Z \leq 2\big)$$

Standardnormalverteilung

Lösung (1):

$$P(Z \leq 1) = \Phi(1.00) = 0.841$$

	0.00	0.01	...	0.09
-2.9	0.002	0.002	...	0.001
-2.8	0.003	0.002	...	0.002
-2.7	0.003	0.003	...	0.003
⋮	⋮			⋮
0.9	0.816	0.819	...	0.839
1.0	**0.841**	0.844	...	0.862
1.1	0.864	0.867	...	0.883
⋮	⋮			⋮

Standardnormalverteilung

Lösung (2):

$$
\begin{aligned}
P(Z > -1) &= 1 - P(Z \leq -1) \\
&= 1 - \Phi(-1.00) \\
&= 1 - 0.159 = 0.841
\end{aligned}
$$

	0.00	0.01	...	0.09
-2.9	0.002	0.002	...	0.001
-2.8	0.003	0.002	...	0.002
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
-1.0	**0.159**	0.156	...	0.138
-0.9	0.184	0.181	...	0.161
$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$

Standardnormalverteilung

Lösung (3):

$$P(-2 \leq Z \leq 2) \quad = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0.977 - 0.023 = 0.954$$

	0.00	0.01	...	0.09
−2.9	0.002	0.002	...	0.001
⋮	⋮			⋮
−2.0	**0.023**	0.022	...	0.018
⋮	⋮			⋮
2.0	**0.977**	0.978	...	0.982
2.1	0.982	0.983	...	0.986
⋮	⋮			⋮

Standardnormalverteilung

Musteraufgabe 5.65 – Quantile mittels Tabelle auf Seite 251

Die Zufallsgröße Z ist standardnormalverteilt.

- Man finde jenen Wert z, den Z mit Wahrscheinlichkeit 0.9 nicht überschreitet. ($P(Z \leq z) = 0.9$).
- Man finde jenen Wert z, den Z mit Wahrscheinlichkeit 0.6 überschreitet. ($P(Z > z) = 0.6$).
- Finde ein a, so dass $P(-a < Z \leq a) = 0.84$.

Standardnormalverteilung

Lösung (1):

$P(Z \leq z) = 0.9 \implies z = N_{0.9} = \Phi^{-1}(0.9) = 1.2816$

α	$\Phi^{-1}(\alpha)$	α	$\Phi^{-1}(\alpha)$	α	$\Phi^{-1}(\alpha)$
0.01	-2.3263	0.34	-0.4125	0.67	0.4399
0.02	-2.0537	0.35	-0.3853	0.68	0.4677
$\vdots$					$\vdots$
0.23	-0.7388	0.56	0.1510	0.89	1.2265
0.24	-0.7063	0.57	0.1764	**0.90**	**1.2816**
0.25	-0.6745	0.58	0.2019	0.91	1.3408
$\vdots$					$\vdots$

Standardnormalverteilung

Lösung (2):

$$P(Z > z) = 0.6 \implies P(Z \le z) = \Phi(z) = 0.4$$
$$\implies z = \Phi^{-1}(0.4) = N_{0.4} = -0.2533$$

α	$\Phi^{-1}(\alpha)$	α	$\Phi^{-1}(\alpha)$	α	$\Phi^{-1}(\alpha)$
0.01	−2.3263	0.34	−0.4125	0.67	0.4399
0.02	−2.0537	0.35	−0.3853	0.68	0.4677
⋮					⋮
0.06	−1.5548	0.39	−0.2793	0.72	0.5828
0.07	−1.4758	**0.40**	**−0.2533**	0.73	0.6128
0.08	−1.4051	0.41	−0.2275	0.74	0.6433
⋮					⋮

Standardnormalverteilung

Lösung (3):

$$
\begin{aligned}
P(-a < Z \leq a) &= 0.84 \\
\Phi(a) - \Phi(-a) &= 0.84 \\
\Phi(a) - [1 - \Phi(a)] &= 0.84 \\
2\Phi(a) &= 1.84 \\
\Phi(a) &= 0.92 \\
\implies a &= \Phi^{-1}(0.92) = N_{0.92} = 1.4051.
\end{aligned}
$$

Grundsätzlich: Falls in Aufgabenstellungen nichts anderes angegeben ist,

- Wahrscheinlichkeiten mit der Tabelle der Verteilungsfunktion berechnen
- und Quantile mit der Tabelle der Quantile.

Normalverteilung

Definition 5.62: Die allgemeine Normalverteilung

Eine Zufallsvariable X heißt **normalverteilt** mit Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 > 0$, kurz $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}$$

besitzt. Es gilt $E(X) = \mu$, $V(X) = \sigma^2$.

Damit ist die zugehörige **standardisierte Zufallsvariable** Z

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt. Für die standardnormalverteilte Zufallsvariable Z gilt wiederum $E(Z) = 0$ und $V(Z) = 1$.

Normalverteilung

Musteraufgabe 5.66 – Intelligenztest

Der Intelligenzquotient (IQ) ist in einer Population in exzellenter Näherung normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.

- Jemand gilt als hochbegabt, wenn der $IQ > 130$. Wie groß ist der Anteil der Hochbegabten in der Population?

Lösung:

Die standardisierte Zufallsgröße von IQ lautet $Z = \dfrac{IQ - 100}{15}$.

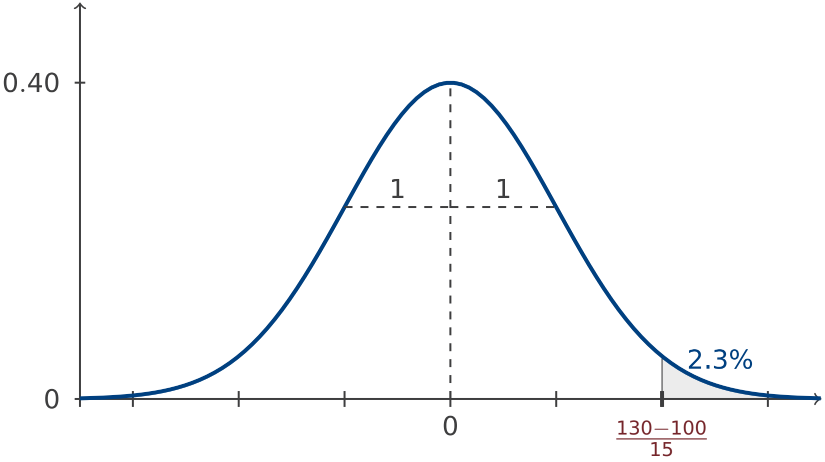
$$
\begin{aligned}
P(IQ > 130) &= 1 - P(IQ \leq 130) \\
&= 1 - P\left(\frac{IQ - 100}{15} \leq \frac{130 - 100}{15}\right) \\
&= 1 - P(Z \leq 2) \\
&= 1 - \Phi(2) = 1 - \mathbf{0.977} = \mathbf{0.023}.
\end{aligned}
$$

Normalverteilung

Nachschlagen in Tabelle $\rightarrow \Phi(2)$

	0.00	0.01	0.02	...
-2.9	0.002	0.002	0.002	...
-2.8	0.003	0.002	0.002	...
$\vdots$				$\vdots$
2.0	**0.977**	0.978	0.978	...
2.1	0.982	0.983	0.983	...
$\vdots$				$\vdots$

Normalverteilung



Normalverteilung

Musteraufgabe 5.66 – Fortsetzung

Der Intelligenzquotient (IQ) ist in einer Population in exzellenter Näherung normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.

- Welchen IQ müsste jemand im Test erreichen, um zu den Top-25% zu gehören?

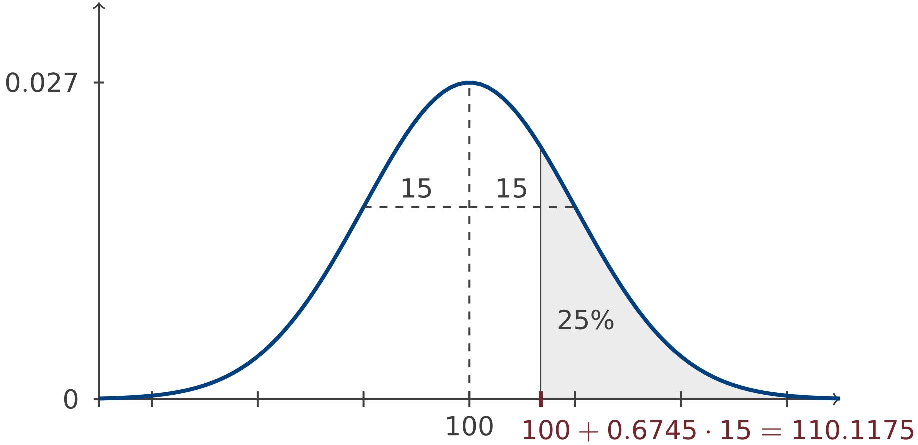
Lösung: Wir suchen ein kritisches Testergebnis a, so dass $P(IQ > a) = \mathbf{0.25}$.
Dies ist gleichbedeutend mit $P(IQ \leq a) = \mathbf{0.75}$.

$$\mathbf{0.75} = P(IQ \leq a) = P\left(\frac{IQ - 100}{15} \leq \frac{a - 100}{15}\right) = P\left(Z \leq \frac{a - 100}{15}\right) = \Phi\left(\frac{a - 100}{15}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a - 100}{15} = \mathbf{N_{0.75}} = \Phi^{-1}(\mathbf{0.75}) = \mathbf{0.6745}$$

$$\Longrightarrow \quad a = 100 + 15 \cdot 0.6745 = \mathbf{110.1175}$$

Normalverteilung



Normalverteilung

Musteraufgabe 5.66 – Fortsetzung

Der Intelligenzquotient (IQ) ist in einer Population in exzellenter Näherung normalverteilt mit $\mu = 100$ und $\sigma = 15$.

- In welchem symmetrischen Intervall um den Erwartungswert liegen 2/3 der Population?

Lösung: Das gesuchte Intervall lautet $[100 - a, 100 + a]$.

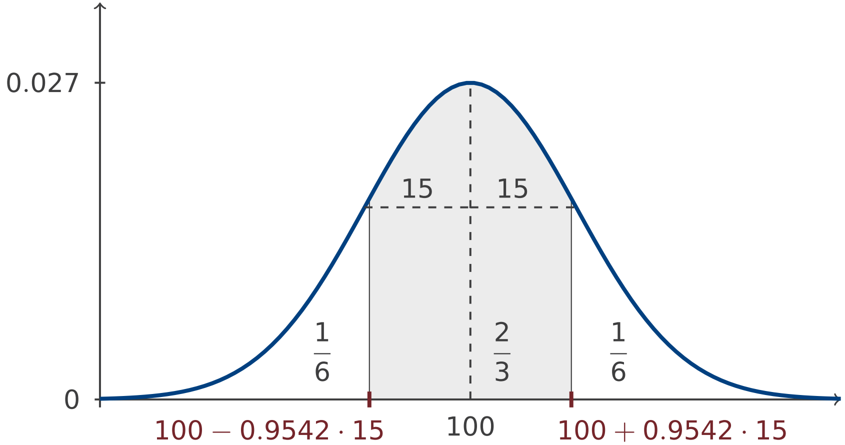
$$
\begin{aligned}
\mathbf{\frac{2}{3}} &= P(100 - a \leq IQ \leq 100 + a) \\
&= P\left(\frac{100 - a - 100}{15} \leq \frac{IQ - 100}{15} \leq \frac{100 + a - 100}{15}\right) \\
&= P\left(-\frac{a}{15} \leq Z \leq \frac{a}{15}\right)
\end{aligned}
$$

Normalverteilung

$$
\begin{aligned}
P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - P\left(Z \le -\frac{a}{15}\right) &= \frac{2}{3} \\
P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{a}{15}\right)\right] &= \frac{2}{3} \\
2 \cdot P\left(Z \le \frac{a}{15}\right) - 1 &= \frac{2}{3} \\
\Phi\left(\frac{a}{15}\right) &= \frac{5}{6} \\
\frac{a}{15} &= \Phi^{-1}(\mathbf{0.83}) = \mathbf{N_{0.83}} = \mathbf{0.9542} \\
a &= 15 \cdot 0.9542 = 14.3130 \approx \mathbf{14}.
\end{aligned}
$$

Im Intervall $[100 \pm 14] = [\mathbf{86}, \mathbf{114}]$ liegen ca. 2/3 der Population.

Normalverteilung



Wahrscheinlichkeitsrechnung

Binomialverteilung

Binomialverteilung

Beispiele

- Ein sechsseitiger Würfel wird fünfmal geworfen. Wir interessieren uns für die Zufallsvariable

$$X = \text{Anzahl der geworfenen 6en.}$$

- Eine Bank besitzt ein Portfolio von 50 Krediten, die **unabhängig** voneinander mit Wahrscheinlichkeit 5% ausfallen. Betrachte

$$X = \text{Zahl der ausgefallenen Kredite.}$$

- In einer Klausur werden 10 Single-Choice-Fragen mit jeweils 5 Antwortmöglichkeiten gestellt, wobei nur eine Antwortmöglichkeit richtig sein kann. Treffen Sie die Annahme, dass eine Frage rein zufällig angekreuzt wird. Betrachte

$$X = \text{Anzahl richtig beantworteter Fragen bei der Klausur.}$$

Binomialverteilung

Binomialverteilung

- Ein Zufallsexperiment wird n mal **unabhängig** durchgeführt.
- Wir interessieren uns, wie oft ein bestimmtes Ereignis A eintritt. A tritt mit Wahrscheinlichkeit π ein.
- Die diskrete Zufallsvariable X – Häufigkeit, mit der Ereignis A bei n unabhängigen Versuchen eintritt – besitzt die Wahrscheinlichkeitsfunktion

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} \pi^x (1 - \pi)^{n-x}$$

  und es gilt $E(X) = n\ \pi$ und $V(X) = n\ \pi(1 - \pi)$.
- Kurz: $X \sim B(n, \pi)$

Binomialverteilung

Fakultät

Die **Fakultät** einer natürlichen Zahl k ist definiert als

$$k! = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1.$$

Es gilt: $1! = 1, \; 0! = 1$.

Binomialkoeffizient

Der **Binomialkoeffizient** $\binom{n}{x}$ ist definiert als

$$\binom{n}{x} = \frac{n!}{(n-x)! \cdot x!}.$$

Es gilt: $\binom{n}{0} = 1, \; \binom{n}{1} = n, \; \binom{n}{n} = 1, \; \binom{n}{x} = 0, \text{ falls } n < x.$

Binomialverteilung

Beispiele:

- 6-seitiger Würfel:

  $A =$ Augenzahl 6, $n = 5,\ \pi = \frac{1}{6}, X \sim B(5, \frac{1}{6})$:

  $E(X) = n \cdot \pi = 5 \cdot \frac{1}{6} = \mathbf{\frac{5}{6}}$

  $V(X) = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \mathbf{\frac{25}{36}}$

- Kredite:

  $A =$ Kreditausfall, $n = 50,\ \pi = 0.05, X \sim B(50, 0.05)$:

  $E(X) = 50 \cdot 0.05 = \mathbf{2.5}$

  $V(X) = 50 \cdot 0.05 \cdot 0.95 = \mathbf{2.375}$

- Klausur:

  $A =$ Frage korrekt beantwortet, $n = 10, \pi = 0.2, X \sim B(10, 0.2)$

  $E(X) = 10 \cdot 0.2 = \mathbf{2}$

  $V(X) = 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8 = \mathbf{1.6}$

Binomialverteilung

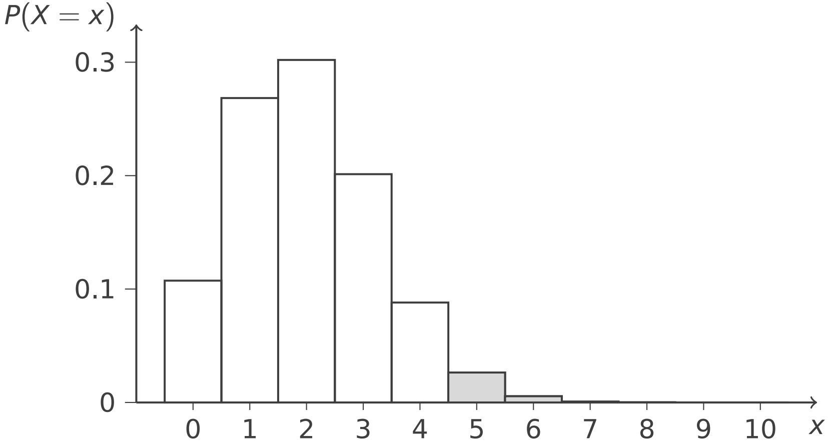
Beispiel: Single-Choice-Klausur (1)

Eine Klausur besteht aus 10 Single-Choice-Fragen. Bei jeder Frage gibt es 5 Antwortmöglichkeiten, von denen jeweils genau eine richtig ist. Ein Student rät.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Klausur besteht, falls zum Bestehen mindestens 5 Fragen richtig beantwortet werden müssen?
- Wie groß bei mindestens 6 Fragen?

Binomialverteilung

Lösung: $X =$ Anzahl richtiger Teilantworten $\sim B(10, 0.2)$.



Binomialverteilung

Lösung: $X =$ Anzahl richtiger Teilantworten $\sim B(10, 0.2)$.

$$\begin{aligned}
P(X=0) &= \binom{10}{0} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^{10} \;=\; \frac{10!}{0! \cdot 10!} \cdot 0.2^0 \cdot 0.8^{10} \\
&= 1 \cdot 1 \cdot 0.8^{10} \;=\; 0.10737 \\[1em]
P(X=1) &= \binom{10}{1} \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^{9} \;=\; \frac{10!}{1! \cdot 9!} \cdot 0.2^1 \cdot 0.8^{9} \\
&= 10 \cdot 0.2 \cdot 0.8^{9} \;=\; 0.26844 \\[1em]
P(X=2) &= \binom{10}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^{8} \;=\; \frac{10!}{2! \cdot 8!} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^{8} \\
&= \frac{10 \cdot 9}{2} \cdot 0.2^2 \cdot 0.8^{8} \;=\; 0.30199 \\
&\dots
\end{aligned}$$

Binomialverteilung

Lösung: $X =$ Anzahl richtiger Teilantworten $\sim B(10, 0.2)$.

$$\begin{aligned}
P(X \geq 5) &= P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) + \\
&\quad P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \\
&= 0.02642 + 0.00551 + 0.00079 + \\
&\quad 0.00007 + 0.000004 + 0.0000001 \\
&= \mathbf{0.03279}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P(X \geq 6) &= P(X \geq 5) - P(X = 5) \\
&= 0.03279 - 0.02642 \\
&= \mathbf{0.00637}
\end{aligned}$$

Binomialverteilung

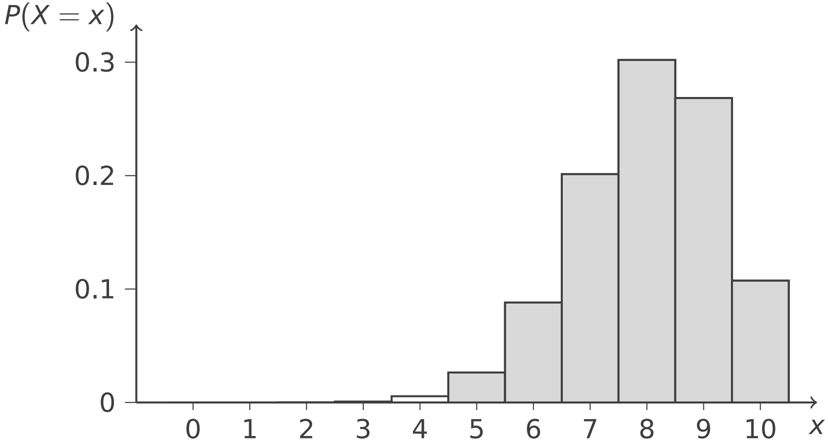
Beispiel: Single-Choice-Klausur (2)

Ein gut vorbereiteter Student absolviert die gleiche Klausur und beantwortet eine beliebige Frage mit Wahrscheinlichkeit 0.8 richtig.

- Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Klausur besteht, falls zum Bestehen mindestens 5 Fragen richtig beantwortet werden müssen?
- Wie groß bei mindestens 6 Fragen?

Binomialverteilung

Lösung: $X =$ Anzahl richtiger Teilantworten $\sim B(10, 0.8)$.



Binomialverteilung

Lösung: X = Anzahl richtiger Teilantworten $\sim B(10, 0.8)$.

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 5) &= P(X=5) + P(X=6) + P(X=7) + \\
&\quad P(X=8) + P(X=9) + P(X=10) \\
&= 0.02642 + 0.08808 + 0.20133 + \\
&\quad 0.30199 + 0.26844 + 0.10737 \\
&= \mathbf{0.99363}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(X \geq 6) &= P(X \geq 5) - P(X=5) \\
&= 0.99363 - 0.02642 \\
&= \mathbf{0.96721}
\end{aligned}
$$

Binomialverteilung

Beispiel: Single-Choice-Klausur (3)

Für die gleiche Klausur und die beiden Studierenden (ratend vs. gut vorbereitet):

- Berechnen Sie die erwartete Anzahl richtiger Antworten?
- Berechnen Sie die erwartete Anzahl von Punkten, wenn jede richtige Antwort 4 Punkte gibt und jede falsche 1 Minuspunkt (und alle Fragen beantwortet werden müssen)?

Binomialverteilung

Lösung: Wir betrachten folgende Zufallsvariablen.

$$X = \text{Anzahl richtiger Teilantworten},$$
$$Y = 4 \cdot X - 1 \cdot (10 - X) = \text{Anzahl erreichter Punkte}.$$

Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts gilt

$$E(Y) = 4 \cdot E(X) - (10 - E(X)).$$

$$\text{Für } X \sim B(10, 0.2): \quad E(X) = 10 \cdot 0.2 = \mathbf{2}$$
$$E(Y) = 4 \cdot 2 - (10 - 2) = \mathbf{0}.$$

$$\text{Für } X \sim B(10, 0.8): \quad E(X) = 10 \cdot 0.8 = \mathbf{8}$$
$$E(Y) = 4 \cdot 8 - (10 - 8) = \mathbf{30}.$$