universität
innsbruck

Mathematik

Thema 6
Mehrdimensionale Analysis

Überblick

Thema: Mehrdimensionale Analysis

Inhalte	Buch
Funktionen mit zwei Variablen	8.3
Partielle Ableitungen	8.4, 8.5
Globale Optimierung	8.6
Implizite Funktionen	8.7
Optimierung unter Nebenbedingungen	8.8

Mehrdimensionale Analysis

Funktionen mit zwei Variablen

Funktionen mit zwei Variablen

Funktionen mit zwei Variablen

Zuordnungsvorschrift $f : M \to \mathbb{R}$, die jedem Vektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Zahl $f(x_1, x_2)$ zuordnet.

M : **Definitionsbereich** von f, in den meisten wirtschaftlichen Anwendungen ist M der **nichtnegative Quadrant**:

$$\mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Grafische Darstellung:

- durch perspektivische Bilder des **Funktionsgrafen**:

$$G_f = \{(x_1, x_2, z) : z = f(x_1, x_2), \mathbf{x} \in M\}$$

- durch **Niveaulinien**

$$L_c = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = c, \mathbf{x} \in M\}$$

Funktionen mit zwei Variablen

Definition 8.4: Lineare Funktion

Unter einer linearen Funktion mit zwei Variablen versteht man eine Funktion mit dem Funktionsterm

$$z = f(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + c$$

Ist $c = 0$, dann nennt man f eine **homogene** lineare Funktion.

Mittels Matrixmultiplikation kann der **homogene** Teil als

$$z = f(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 = \mathbf{b}^\top \cdot \mathbf{x}$$

geschrieben werden mit $\mathbf{b}^\top = (b_1, b_2)$ und $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Funktionen mit zwei Variablen

Definition 8.5: Quadratische Funktion

Unter einer quadratischen Funktion mit zwei Variablen versteht man eine Funktion mit dem Funktionsterm

$$z = f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

Sind $b_1 = b_2 = c = 0$, dann nennt man f eine **homogene** quadratische Funktion. Der maximale Definitionsbereich eines quadratischen Funktionsterms ist $\mathbb{R}^2$.

Funktionen mit zwei Variablen

Mittels Matrixmultiplikation kann der **homogene** Teil geschrieben werden als:

$$z = f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

$$= (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Musteraufgabe 8.7

Man bestimme die Matrixdarstellung der homogenen quadratischen Funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + x_2^2$.

Lösung:

$$\left.\begin{array}{rcl} a_{11} & = & 2 \\ 2a_{12} & = & -4 \implies a_{12} = -2 \\ a_{22} & = & 1 \end{array}\right\} \implies \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Analysis

Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen

Partielle Ableitung erster Ordnung

Unter einer **partiellen Ableitung** einer Funktion $f(x_1, x_2)$ mit zwei Variablen versteht man die Ableitung der Funktion f nach einer der beiden Variablen x_1 oder x_2, wobei die andere Variable als **Konstante** behandelt wird.

Symbolisch:

$$\text{partielle Ableitung nach } x_1\text{:} \quad f_1' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\text{partielle Ableitung nach } x_2\text{:} \quad f_2' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

Der **Zeilenvektor**

$$f'(\mathbf{x}) = (f_1'(\mathbf{x}), f_2'(\mathbf{x}))$$

heisst **Ableitung** der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$.

Totales Differential

Beispiel

Sei $f(x_1, x_2) = \sqrt{x_1 x_2}$. Angenommen an der Stelle $\mathbf{x} = (2, 1)^\top$ erhöhen sich x_1 um $dx_1 = 1$ und x_2 um $dx_2 = 1$.

- Wie verändert sich dadurch der Funktionswert $f(x_1, x_2)$?
- Wie kann diese Veränderung durch die partiellen Ableitungen approximiert werden?

Lösung: Exakte Veränderung.

$$\Delta f(x_1, x_2) \quad = \quad f(3, 2) - f(2, 1) = \sqrt{6} - \sqrt{2} = 2.449 - 1.414 = 1.035.$$

Interpretation: Durch den Anstieg in x_1 von 2 auf 3 sowie in x_2 von 1 auf 2, steigt der Funktionswert um 1.035 an.

Totales Differential

Lösung: Partielle Ableitungen.

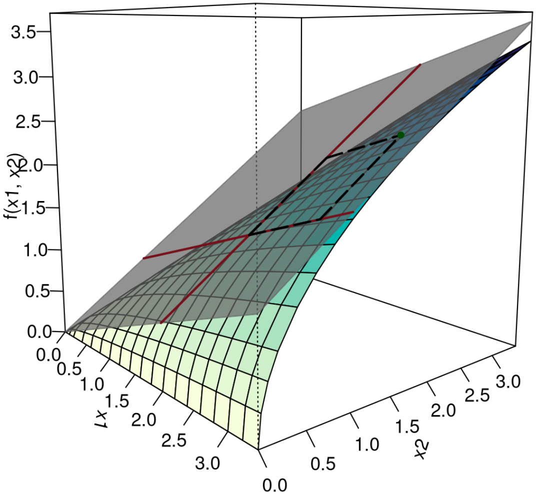
$$
\begin{aligned}
f(x_1, x_2) &= \sqrt{x_1 x_2} = x_1^{0.5} x_2^{0.5} \\
f_1'(x_1, x_2) &= 0.5 x_1^{-0.5} x_2^{0.5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_2}{x_1}} \qquad f_1'(2,1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{8}} = 0.354 \\
f_2'(x_1, x_2) &= 0.5 x_1^{0.5} x_2^{-0.5} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x_1}{x_2}} \qquad f_2'(2,1) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707
\end{aligned}
$$

Interpretation: In $\mathbf{x} = (2, 1)^\top$ steigt der Funktionswert um etwa 0.354, wenn x_1 um eine Einheit steigt, und um etwa 0.707, wenn x_2 um eine Einheit steigt.

Totales Differential: Summe der partiellen Veränderungen.

$$
df(2, 1) = 0.354 \cdot 1 + 0.707 \cdot 1 = 1.061
$$

Totales Differential



Totales Differential

Totales Differential

Das totale Differential einer Funktion $f(x_1, x_2)$ ist definiert als

$$df(x_1, x_2) = f_1'(x_1, x_2) \cdot dx_1 + f_2'(x_1, x_2) \cdot dx_2 = f'(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}.$$

Damit wird die Differenz der Funktionswerte Δf vor und nach einer marginalen Veränderung dx_1 und dx_2 in beiden Variablen näherungsweise ermittelt:

$$\Delta f(x_1, x_2) \approx df(x_1, x_2).$$

Die Näherung ist im Allgemeinen um so besser, je kleiner dx_1 und dx_2 sind.

Totales Differential

Typische Anwendung: $z = f(x_1, x_2)$ ist eine Produktionsfunktion.

- Frage: Wie wirkt sich eine marginale Erhöhung der Faktoreinsatzmenge x_1 um dx_1 und/oder x_2 um dx_2 Mengeneinheiten auf den Output z aus?
- Falls die Funktion $z = f(x_1, x_2)$ und die Erhöhungen dx_1, dx_2 genau bekannt sind, berechnet man die **exakte Differenz der Funktionswerte** durch
$$\Delta z = \Delta f(x_1, x_2) = f(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2) - f(x_1, x_2)$$
- Kann man dagegen nur eine Annahme über die partiellen Ableitungen von $f(x_1, x_2)$ (= partielle Grenzproduktivität) an einer Stelle $\mathbf{x}$ treffen – wie das oft in den wirtschaftswissenschaftlichen Anwendungen der Fall ist – so benützt man als **Näherungsformel** für die Differenz der Funktionswerte $\Delta f(x_1, x_2)$ das **totale Differential** $df(x_1, x_2)$.

Totales Differential

Musteraufgabe

Ein Produktionsunternehmen stellt ein Gut aus zwei Rohstoffen A und B her. Die herstellbare Menge an Gütern hängt ab von den Mengen an eingesetzten Rohstoffen gemäß der Produktionsfunktion

$$q = f(x_1, x_2) = 100x_1^{0.4}x_2^{0.6}$$

Zur Zeit stehen wöchentlich 3 Tonnen des Rohstoffs A und 5 Tonnen des Rohstoffs B zur Verfügung. Es besteht die Möglichkeit, die Zulieferung des Rohstoffs A wöchentlich um 0.1 Tonnen zu steigern, während die Zulieferungen des Rohstoffs B in Zukunft wöchentlich um 0.05 Tonnen sinken werden.

- Wie werden sich die veränderten Zulieferungen auf die marginale Produktion auswirken?

Totales Differential

Lösung: $x_1 = 3$ und $x_2 = 5$ sind die momentan verfügbaren Mengen von A und B.

$$f_1'(x_1, x_2) = 40 x_1^{-0.6} x_2^{0.6} \qquad f_2'(x_1, x_2) = 60 x_1^{0.4} x_2^{-0.4}$$

$$f_1'(3, 5) = 54.3462 \qquad f_2'(3, 5) = 48.9116$$

Die approximative Gesamtänderung der Produktion $df(x_1, x_2)$ bei einer marginalen Änderung von Menge A um $dx_1 = 0.1$ und Menge B um $dx_2 = -0.05$ ist also

$$\begin{aligned} df(3,5) &= f_1'(3,5) \cdot dx_1 + f_2'(3,5) \cdot dx_2 \\ &= 54.3462 \cdot 0.1 + 48.9116 \cdot (-0.05) = 2.99 \end{aligned}$$

Totales Differential

Bemerkung: Die marginale Änderung $dq = df(\mathbf{x}) = 2.99$ ist damit eine Approximation der in den nächsten Wochen eintretenden Veränderung der Produktion.

	Woche 0	Woche 1	Woche 2	Woche 3
$\mathbf{x}$	$(3.00, 5.00)$	$(3.10, 4.95)$	$(3.20, 4.90)$	$(3.30, 4.85)$
$q = f(\mathbf{x})$	407.60	410.49	413.22	415.77
Δq		2.89	2.73	2.55

Partielle Ableitungen

Partielle Ableitungen zweiter Ordnung

Die **partielle Ableitung 2. Ordnung** einer Funktion f mit zwei Variablen x_1 und x_2 ist die **Ableitung einer partiellen Ableitung** von f nach x_1 oder x_2.

Es gibt vier partielle Ableitungen 2. Ordnung:

$$f''_{11}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \qquad f''_{12}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$f''_{21}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \qquad f''_{22}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$$

Matrix der 2. Ableitungen: **Hesse-Matrix** von f an der Stelle $\mathbf{x}$:

$$f''(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f''_{11}(\mathbf{x}) & f''_{12}(\mathbf{x}) \\ f''_{21}(\mathbf{x}) & f''_{22}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Partielle Ableitungen

Bemerkung:
Wenn die zweiten partiellen Ableitungen **stetig** sind, dann gilt immer

$$f''_{12} = f''_{21},$$

das heisst, es kommt **nicht auf die Reihenfolge** der Variablen an, nach denen differenziert wird. Die Hesse-Matrix ist dann immer symmetrisch.

Partielle Ableitungen

Musteraufgabe 8.27

Man bestimme die Hesse-Matrix der Funktion $f(x_1, x_2) = 2x_1x_2^3 - x_2^2 + 5x_1 - 7$ an der Stelle $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Lösung: Zuerst $f_1'(\mathbf{x}) = 2x_2^3 + 5$ und $f_2'(\mathbf{x}) = 6x_1x_2^2 - 2x_2$. Nun die 2. Ableitungen:

$$f''_{11}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(2x_2^3 + 5\right) = 0 \qquad f''_{12}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(6x_1x_2^2 - 2x_2\right) = 6x_2^2$$

$$f''_{21}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(2x_2^3 + 5\right) = 6x_2^2 \qquad f''_{22}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(6x_1x_2^2 - 2x_2\right) = 12x_1x_2 - 2$$

Hesse-Matrix:

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 6x_2^2 \\ 6x_2^2 & 12x_1x_2 - 2 \end{pmatrix} \qquad f''(1,2) = \begin{pmatrix} 0 & 24 \\ 24 & 22 \end{pmatrix}$$

Mehrdimensionale Analysis

Globale Optimierung

Globale Optimierung

Globale Extremwerte

Es sei $f : M \to \mathbb{R}, M \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Funktion mit zwei Variablen.

Ein Punkt $\mathbf{a} \in M$ ist ein **globales Maximum** von f, wenn

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \quad \text{für alle } \mathbf{x} \in M.$$

Ein Punkt $\mathbf{a} \in M$ ist ein **globales Minimum** von f, wenn

$$f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a}) \qquad \text{für alle } \mathbf{x} \in M.$$

Globale Optimierung

Satz 8.30: Stationäre (kritische) Punkte

Es sei f eine Funktion mit zwei Variablen und einer stetigen Ableitung, und es sei $\mathbf{a}$ ein innerer Punkt von M.

Wenn der Punkt $\mathbf{a}$ ein globales Maximum oder ein globales Minimum von f ist, dann muss $\mathbf{a}$ ein **stationärer Punkt** von f sein, d.h. es muss die Gleichung

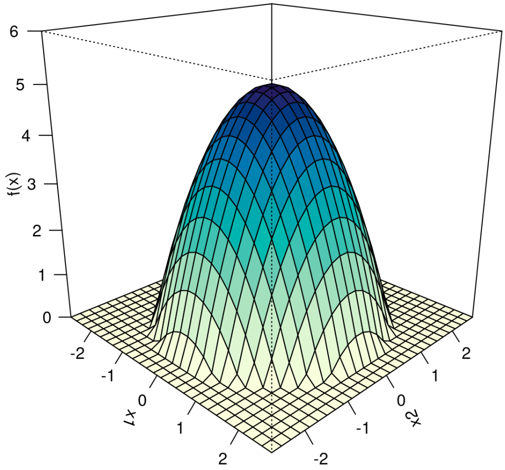
$$f'(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

erfüllt sein.

In einem globalen Maximum oder globalen Minimum einer Funktion sind alle partiellen Ableitungen erster Ordnung gleich Null.

Beachte: Die Bedingung, dass alle partiellen Ableitungen erster Ordnung gleich null sein müssen, ist notwendig aber nicht hinreichend dafür, dass es sich bei $\mathbf{a}$ um ein Maximum oder Minimum handelt.

Globale Optimierung



Globale Optimierung

Musteraufgabe 8.32

Man finde ein globales Minimum der Funktion

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 - 2x_1 + 4x_2 + 3$$

Lösung: Wir bilden die ersten partiellen Ableitungen und setzen diese Null. So finden wir einen kritischen Punkt **a**:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcrcr} f_1' & = & 4x_1 & - & x_2 & - & 2 & = & 0 \\ f_2' & = & -x_1 & + & 2x_2 & + & 4 & = & 0 \end{array}\right\} \begin{array}{rcr} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -2 \end{array} \Bigg\} \quad \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Nur dieser eine Punkt **a** kommt als globales Minimum in Frage.

- Wie können wir sicher sein, dass **a** wirklich ein **globales Minimum** ist?
- Dazu werden wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung untersuchen, sprich die **Hesse-Matrix**.

Globale Optimierung

Definition 8.33

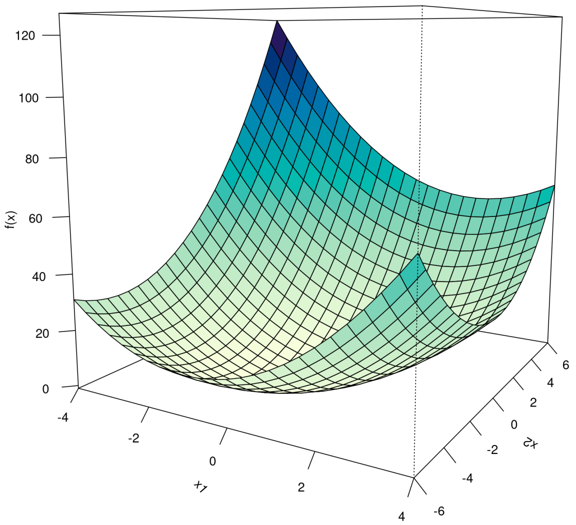
Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ heißt **positiv semidefinit**, wenn $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 8.34

Eine Funktion f mit zwei Variablen und einer stetigen zweiten Ableitung heisst **konvex**, wenn ihre Hesse-Matrix überall **positiv semidefinit** ist.

Konvex bedeutet: Der Funktionsgraph ist *nach oben offen* (oder *nach unten gewölbt*).

Lösung Musteraufgabe 8.32



Globale Optimierung

Satz 8.35

Bei einer **konvexen Funktion** ist jeder **stationäre Punkt** ein **globales Minimum**.

Satz 8.36

Eine symmetrische 2×2 Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist genau dann **positiv semidefinit**, wenn

$$a_{11} \geq 0 \quad \text{und} \quad a_{22} \geq 0 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{A}) \geq 0$$

Beachte:

- Da die Matrix symmetrisch ist, gilt $a_{12} = a_{21}$.
- Falls $a_{11} > 0$ und $\det(\mathbf{A}) \geq 0$, so ist immer auch $a_{22} \geq 0$. Letztere Bedingung muss dann nicht separat überprüft werden.

Lösung Musteraufgabe 8.32

Die **Hesse-Matrix** von f lautet:

$$f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$f''_{11}(\mathbf{x}) = 4 > 0 \quad \text{und} \quad f''_{22}(\mathbf{x}) = 2 > 0$$

und

$$\det(f''(\mathbf{x})) = 8 - 1 = 7 \geq 0.$$

Die Hesse-Matrix ist **positiv semidefinit** und daher die Funktion **konvex**, die Stelle **a** ist ein **globales Minimum**.

Musteraufgabe

Man überprüfe, ob die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1 - 6$$

konvex ist.

Lösung: Die partiellen Ableitungen erster Ordnung lauten:

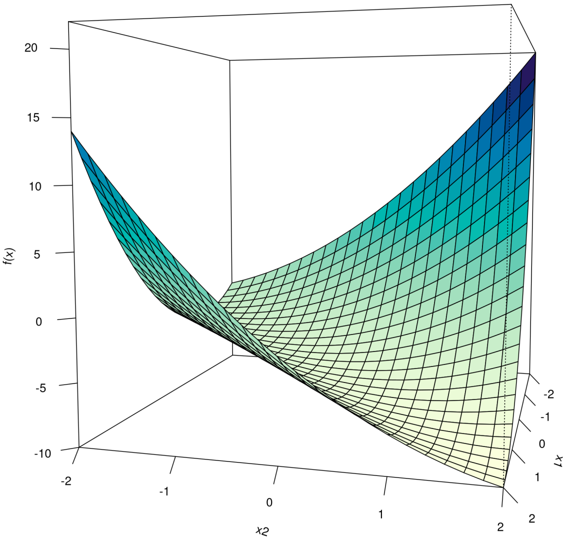
$$\begin{aligned} f_1'(x_1, x_2) &= 4x_1 - 3x_2 - 2 \\ f_2'(x_1, x_2) &= -3x_1 + 2x_2 \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix lautet:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es sind zwar $a_{11} = 4 > 0$ und $a_{22} = 2 > 0$, aber $\det(\mathbf{A}) = 8 - 9 = -1 < 0$. Daher ist die Matrix **nicht positiv semidefinit** und die Funktion daher **nicht konvex**.

Musteraufgabe



Globale Optimierung

Musteraufgabe 8.42

Man finde das Optimum der Funktion $f(x_1, x_2) = e^{-x_1^2 - x_2^2}$

Lösung: Damit f ein Optimum besitzt, muss dieses ein **stationärer Punkt** sein:

$$f_1'(x_1, x_2) = -2x_1 e^{-x_1^2 - x_2^2}, \quad f_2'(x_1, x_2) = -2x_2 e^{-x_1^2 - x_2^2}$$

Das Gleichungssystem $f_1' = 0$ und $f_2' = 0$ besitzt die Lösung $\mathbf{a} = (0, 0)^\top$, denn die Exponentialfunktion ist immer > 0

Das ist der einzige stationäre Punkt.

- Wie können wir sicher sein, dass **a** wirklich ein **globales Maximum** ist?
- Wir untersuchen wieder die **Hesse-Matrix**.

Globale Optimierung

Definition 8.38

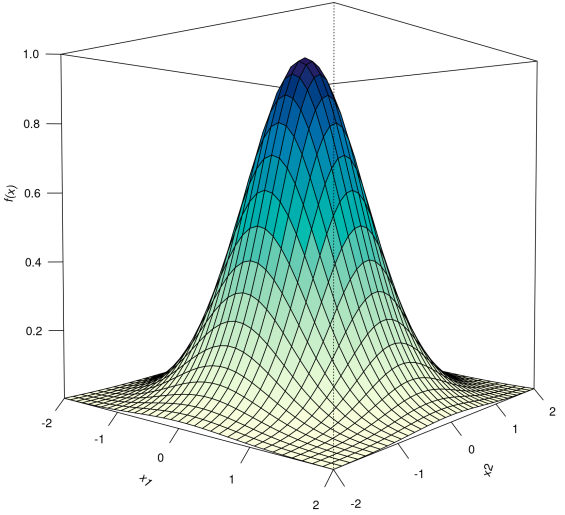
Eine symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ der Ordnung $n \times n$ heißt **negativ semidefinit**, wenn $\mathbf{x}^\top \mathbf{A}\mathbf{x} \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Definition 8.39

Eine Funktion mit zwei Variablen und einer stetigen zweiten Ableitung heisst **konkav**, wenn ihre Hesse-Matrix überall **negativ semidefinit** ist.

Konkav bedeutet: Der Funktionsgraph ist *nach unten offen* (oder *nach oben gewölbt*).

Lösung Musteraufgabe 8.42



Globale Optimierung

Satz 8.40

Bei einer **konkaven Funktion** ist jeder **stationäre Punkt** ein **globales Maximum**.

Satz 8.41

Eine symmetrische 2×2 Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ist genau dann **negativ semidefinit**, wenn

$$a_{11} \leq 0 \quad \text{und} \quad a_{22} \leq 0 \quad \text{und} \quad \det(\mathbf{A}) \geq 0$$

Beachte:

- Wieder gilt, dass $a_{12} = a_{21}$.
- Falls $a_{11} < 0$ und $\det(\mathbf{A}) \geq 0$, gilt wieder auch $a_{22} \leq 0$.

Lösung Musteraufgabe 8.42

Die **Hesse-Matrix** von f lautet:

$$f''(\mathbf{x}) = e^{-x_1^2-x_2^2} \begin{pmatrix} -2(1-2x_1^2) & 4x_1x_2 \\ 4x_1x_2 & -2(1-2x_2^2) \end{pmatrix}, \quad f''(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Damit sind

$$f''_{11}(\mathbf{x}) = -2 < 0 \quad \text{und} \quad f''_{22}(\mathbf{x}) = -2 < 0$$

und

$$\det(f''(\mathbf{x})) = 4 \geq 0.$$

Die Hesse-Matrix ist **negativ semidefinit**, die Funktion ist **konkav** und die Stelle **a** ist ein **globales Maximum**.

Globale Optimierung

Musteraufgabe

Man überprüfe, ob die Funktion

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_1 x_2 - x_2^2 + x_1 + 1$$

konkav ist.

Lösung: Die partiellen Ableitungen erster Ordnung sind:

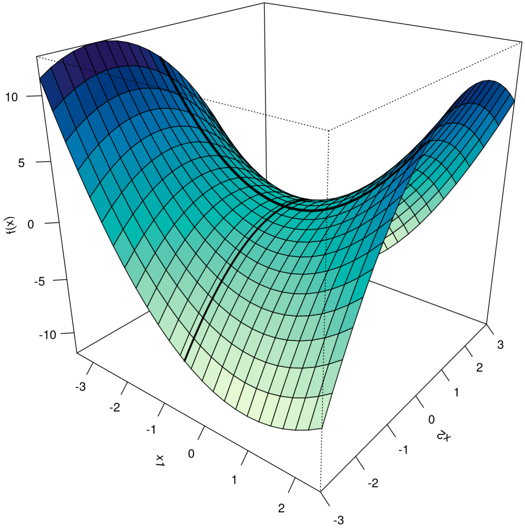
$$\begin{aligned} f_1'(x_1, x_2) &= 2x_1 + x_2 + 1 \\ f_2'(x_1, x_2) &= x_1 - 2x_2 \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix lautet:

$$\mathbf{A} = f''(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Da $a_{11} = 2 > 0$, ist f nicht konkav. f ist allerdings auch nicht konvex, denn $a_{22} = -2 < 0$. Außerdem ist auch $\det(\mathbf{A}) = -5 < 0$.

Globale Optimierung



Mehrdimensionale Analysis

Implizite Funktionen

Implizite Funktionen

Substitution von Produktionsfaktoren

Ein Hersteller produziert ein Gut aus den Rohstoffen A und B. Die Produktionsfunktion lautet (x_1, x_2 sind die eingesetzten Mengen von A und B):

$$q = F(x_1, x_2) = 100x_1x_2$$

- Der Hersteller möchte die Faktorkombination so ändern, dass der Output q unverändert bleibt $\to$ **Faktorsubstitution**.
- Er setzt die Menge x_1 fest und berechnet x_2 so, dass q unverändert bleibt $\implies x_2 = f(x_1)$ ist eine Funktion von x_1.
- $f(x_1)$ ist durch die Gleichung

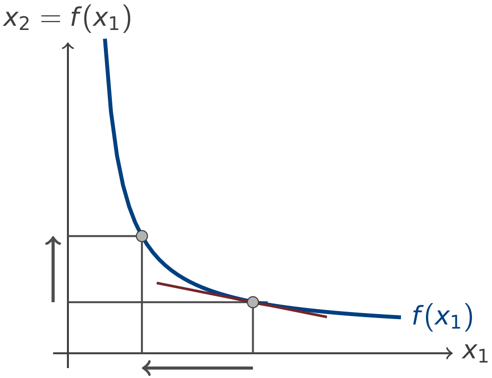
  $$q = F(x_1, x_2) = F(x_1, f(x_1)) = 100\,x_1\,f(x_1)$$

  implizit definiert und kann hier leicht ausgerechnet werden:

  $$q = 100x_1\,f(x_1) \quad \implies \quad f(x_1) = \frac{q}{100x_1}$$

Implizite Funktionen

Bemerkung: In der **Mikroökonomie** wird im Falle einer Produktionsfunktion die Funktion $f(x_1)$ eine **Isoquante** genannt.



Faktorsubstitution $A \leftrightarrow B$

Implizite Funktionen

Musteraufgabe 8.54

Die Produktionsfunktion laute $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$. Im Moment verwendet der Hersteller die Faktorkombination $(x_1, x_2) = (3, 5)$. Es soll nun der Einsatz von Faktor A erhöht werden und der Einsatz von Faktor B verringert werden und zwar unter Beibehaltung des aktuellen Produktionsniveaus.

Berechnen Sie die Grenzrate der Substitution von Faktor A gegen Faktor B.

Lösung:

Gesucht ist die erste Ableitung der Funktion $f(x_1)$, die implizit durch

$$F(x_1, f(x_1)) = F(3, 5) = 109$$

definiert ist.

Lösung Musteraufgabe 8.54

Wir können $x_2 = f(x_1)$ **explizit** bestimmen:

$$\begin{aligned} F(x_1, f(x_1)) &= 109 \\ x_1^2 + 5x_1 f(x_1) + f(x_1)^2 &= 109 \\ \textbf{quadratische Gleichung in } f(x_1)\textbf{:} & \\ f(x_1)^2 + 5x_1 f(x_1) + (x_1^2 - 109) &= 0 \end{aligned}$$

Wir lösen diese Gleichung, dabei sind wir nur an den **positiven Lösungen** interessiert:

$$f(x_1) = \frac{-5x_1 + \sqrt{25x_1^2 - 4(x_1^2 - 109)}}{2} = \frac{\sqrt{436 + 21x_1^2} - 5x_1}{2}$$

Lösung Musteraufgabe 8.54

Die erste Ableitung lautet:

$$
\begin{aligned}
f(x_1) &= \frac{\sqrt{436 + 21x_1^2} - 5x_1}{2} \\
f'(x_1) &= \frac{1}{2}\left(\frac{42x_1}{2\sqrt{436 + 21x_1^2}} - 5\right) \\
\text{für } x_1 = 3: \qquad f'(3) &= -1.24
\end{aligned}
$$

Wird Faktor A um eine marginale ME erhöht, muss Faktor B um ca. 1.24 ME verringert werden, damit das Produktionsniveau unverändert bleibt.

Es gibt eine **weitere Berechnungsmöglichkeit** ...

Ableitung von impliziten Funktionen

Wir wissen, dass die Gleichung $F(x_1, x_2) = \text{const}$, x_2 implizit als Funktion von x_1 festlegt, also $x_2 = f(x_1)$. Wir suchen $f'(x_1)$.

- Um die Ableitung $f'(x_1)$ zu bekommen, können wir die **Gleichung**

$$F(x_1, f(x_1)) = \text{const}$$

  auf beiden Seiten nach x_1 differenzieren.

- Die rechte Seite ist eine Konstante und damit ist die Ableitung gleich null.

- Für die linke Seite nehmen wir die bekannte **Kettenregel** zu Hilfe.

Ableitung von impliziten Funktionen

Wir schreiben die linke Seite $(F(x_1, f(x_1)))$ als **Hintereinanderausführung** von zwei Funktionen

$$F(\mathbf{g}(x_1)) \qquad\qquad \text{mit } \mathbf{g}(x_1) = \begin{pmatrix} x_1 \\ f(x_1) \end{pmatrix}$$

und leiten dann nach x_1 ab:

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{dx_1} &= F'(\mathbf{g}(x_1)) \cdot \mathbf{g}'(x_1) \\
&= \begin{pmatrix} F_1'(\mathbf{g}(x_1)) & F_2'(\mathbf{g}(x_1)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_1) \end{pmatrix} \\
\frac{dF}{dx_1} &= F_1'(x_1, x_2) + F_2'(x_1, x_2) f'(x_1)
\end{aligned}$$

Ableitung von impliziten Funktionen

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
F(x_1, x_2) = F(\mathbf{g}(x_1)) &= \text{const} \\
\frac{dF}{dx_1} &= 0 \\
F_1'(x_1, x_2) + F_2'(x_1, x_2) f'(x_1) &= 0 \\
f'(x_1) &= -\frac{F_1'(x_1, x_2)}{F_2'(x_1, x_2)}
\end{aligned}$$

Satz 8.55: Ableitung von impliziten Funktionen

Es seien $F(x_1, x_2)$ und $x_2 = f(x_1)$ Funktionen mit stetiger Ableitung. Wenn $F(x_1, f(x_1)) = \text{const}$, dann gilt:

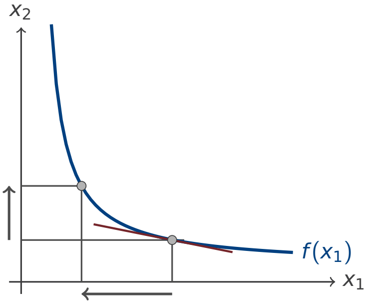
$$f'(x_1) = -\frac{F_1'(x_1, x_2)}{F_2'(x_1, x_2)}$$

Implizite Funktionen

Nehmen wir noch einmal das Bild der Isoquante, dann sehen wir

$$f'(x_1) = -\frac{F_1'(x_1, x_2)}{F_2'(x_1, x_2)}$$

ist der Anstieg der Isoquante für jede Faktorkombination.



Faktorsubstitution $A \leftrightarrow B$

Implizite Funktionen

Musteraufgabe 8.54: Neuerliche Lösung mittels Satz 8.51.

Es war $F(x_1, x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 + x_2^2$ mit den partiellen Ableitungen:

$$F_1'(x_1, x_2) = 2x_1 + 5x_2, \qquad F_2'(x_1, x_2) = 5x_1 + 2x_2$$

Daraus folgt:

$$f'(3) = -\frac{F_1'(3,5)}{F_2'(3,5)} = -\frac{31}{25} = -1.24$$

Mehrdimensionale Analysis

Optimierung unter Nebenbedingungen – Ergänzungen

Optimierung unter Nebenbedingungen

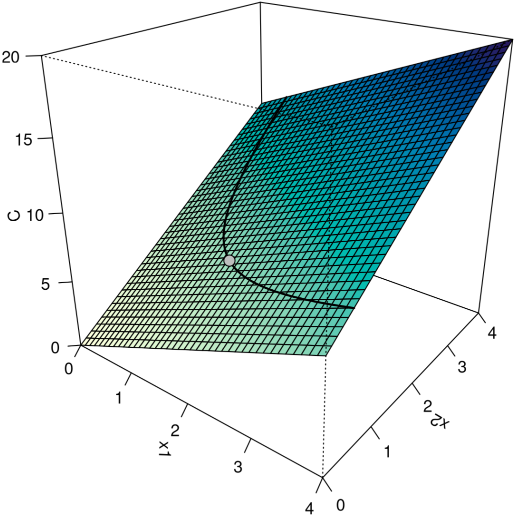
Mit dem Wissen über das Ableiten von impliziten Funktionen wollen wir uns die **Methode von Lagrange** und vor allem warum sie funktioniert noch einmal anschauen.

Musteraufgabe 8.58

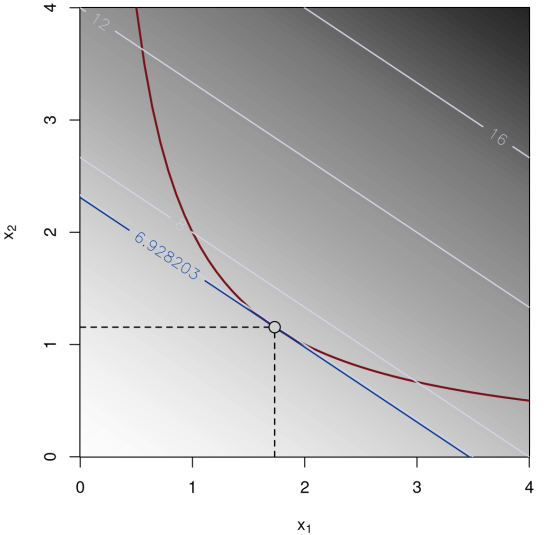
Die Produktionsfunktion laute $q = F(x_1, x_2) = 100x_1x_2$ und die Faktorpreise betragen 2 bzw. 3 GE pro Mengeneinheit. Man bestimme die optimale Faktorkombination bei einem Produktionsniveau von $q = 200$.

Damit lautet die Kostenfunktion $C(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$. Diese soll minimiert werden unter der Nebenbedingung, dass die Produktionsmenge $q = F(x_1, x_2)$ beträgt.

Grafische Veranschaulichung



Grafische Veranschaulichung



Optimierung unter Nebenbedingungen

1. Wir definieren die Faktormenge für B **implizit** als $f(x_1)$ durch die Nebenbedingung $q = F(x_1, f(x_1))$.
2. Dann suchen wir einen stationären Punkt der Kostenfunktion $C(x_1, f(x_1))$. Dieser muss also $\frac{dC}{dx_1} = 0$ erfüllen.
3. Mit der **Kettenregel**:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dx_1} \; &= \; C_1'(x_1, f(x_1)) + C_2'(x_1, f(x_1)) \cdot f'(x_1) \quad &= \quad 0 \\ & \qquad f'(x_1) \quad &= \quad -\frac{C_1'(x_1, x_2)}{C_2'(x_1, x_2)} \end{aligned}$$

4. Andererseits ist $f'(x_1)$ die Ableitung einer durch $F(x_1, x_2) = q$ **implizit definierten** Funktion und damit gilt nach Satz 8.55:

$$f'(x_1) = -\frac{F_1'(x_1, x_2)}{F_2'(x_1, x_2)}$$

Optimierung unter Nebenbedingungen

Wir erhalten: $$-\frac{F_1'(x_1,x_2)}{F_2'(x_1,x_2)} = -\frac{C_1'(x_1,x_2)}{C_2'(x_1,x_2)}$$
$$\frac{C_2'(x_1,x_2)}{F_2'(x_1,x_2)} = \frac{C_1'(x_1,x_2)}{F_1'(x_1,x_2)} = \lambda$$

Wenn wir uns an das Lagrange Rechenschema zurück erinnern,

Schritt 2

Wir suchen stationäre Punkte der Lagrange-Funktion. In einem stationären Punkt der Lagrange-Funktion sind alle drei partiellen Ableitungen erster Ordnung Null:

$$L_1' = C_1' - \lambda F_1' = 0$$
$$L_2' = C_2' - \lambda F_2' = 0$$
$$L_3' \text{ (Nebenbedingung)}: \quad F = q$$

dann haben wir die ersten beiden Bedingungen hergeleitet. Die dritte Gleichung ist die Nebenbedingung, unter der optimiert wird.

Grafische Veranschaulichung

Wir können uns das Problem auch noch einmal grafisch anschauen.
Die Niveaulinien der Kostenfunktion $C(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ haben für alle (x_1, x_2) die Steigung

$$-\frac{C_1'(x_1, x_2)}{C_2'(x_1, x_2)} \quad = \quad -\frac{2}{3} \; = \; -0.67$$

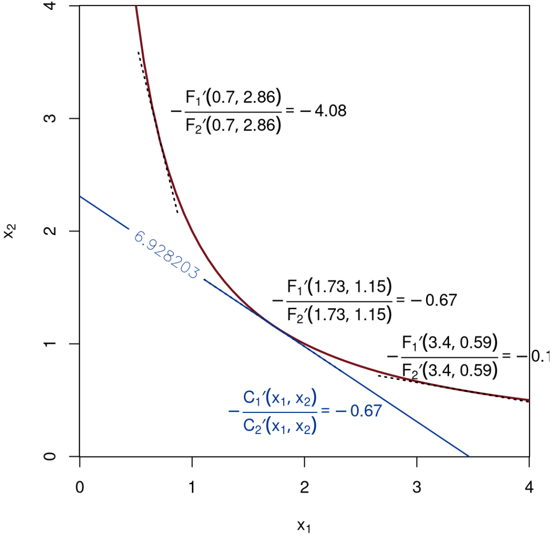
Die Isoquante der Nebenbedingung $200 = F(x_1, x_2) = 100x_1x_2$ hat im Punkt (x_1, x_2) die Steigung

$$-\frac{F_1'(x_1, x_2)}{F_2'(x_1, x_2)} \quad = \quad -\frac{100x_2}{100x_1} \; = \; -\frac{x_2}{x_1}$$

Nur im Optimum mit $x_1 = 1.73$ und $x_2 = 1.15$ sind beide Steigungen gleich

$$-\frac{F_1'(1.73, 1.15)}{F_2'(1.73, 1.15)} \quad = \quad -\frac{1.15}{1.73} \; = \; -0.67 \; = \; -\frac{C_1'(1.73, 1.15)}{C_2'(1.73, 1.15)}$$

Grafische Veranschaulichung



Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Es sei $C(x_1, x_2)$ eine Zielfunktion, die unter der **Nebenbedingung** $F(x_1, x_2) = q$ zu optimieren ist.

- Die optimalen Werte für die Variablen seien x_1^* und x_2^*. Diese Werte sind eine Funktion von q.
- Setzen wir diese optimalen Werte in die Zielfunktion ein, so erhalten wir $C^*(q)$.
- Es gilt, dass $\dfrac{\partial C^*}{\partial q} = \lambda^*$.
- Das heißt der Lagrange-Multiplikator gibt an, um wie viel sich der optimale Wert der Zielfunktion näherungsweise ändern würde, wenn die Nebenbedingung um eine marginale Einheit gelockert würde.

Interpretation des Lagrange-Multiplikators

Musteraufgabe 8.58 (nochmals)

Minimiere $C(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ unter der Nebenbedingung $100x_1x_2 = q$.

Lösung: Die **Lagrange-Funktion** lautet:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 3x_2 - \lambda(\mathbf{100x_1x_2 - q})$$

Wir bilden die drei partiellen Ableitungen:

$$L_1' = 2 - 100\lambda x_2 = 0 \quad \Longrightarrow x_2 = \frac{0.02}{\lambda}$$

$$L_2' = 3 - 100\lambda x_1 = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = \frac{0.03}{\lambda}$$

$$L_3' \text{ (Nebenbedingung)}: \quad 100x_1x_2 = q \quad \Longrightarrow x_1x_2 = \frac{q}{100}$$

Lösung Musteraufgabe 8.58

Ein **stationärer Punkt** muss also die **drei Gleichungen** erfüllen:

$$x_1 = \frac{0.03}{\lambda}, \quad x_2 = \frac{0.02}{\lambda}, \quad x_1 x_2 = \frac{q}{100}$$

Daraus errechnen wir

$$x_1 x_2 = \frac{q}{100} \implies \frac{0.02 \cdot 0.03}{\lambda^2} = \frac{q}{100} \implies \lambda^* = \sqrt{\frac{0.06}{q}}$$

$$x_1^* = \frac{0.03}{\lambda^*} = \sqrt{0.015q}, \qquad x_2^* = \frac{0.02}{\lambda^*} = \sqrt{\frac{0.02q}{3}}$$

$$C^*(x_1^*, x_2^*) = 2 \cdot \sqrt{0.015q} + 3 \cdot \sqrt{\frac{0.02q}{3}} = 2\sqrt{0.06q} = C^*(q)$$

$$C'(q) = \sqrt{\frac{0.06}{q}} = \lambda^*$$

Lösung Musteraufgabe 8.58

Beispiel: $q = 200$ (siehe Thema 2).

$$\begin{aligned}
\text{Menge } x_1^* &= 1.73205 = \sqrt{0.015 \cdot 200} \\
\text{Menge } x_2^* &= 1.15470 = \sqrt{0.02/3 \cdot 200} \\
\text{Kosten } C^* &= 6.92820 = 2 \cdot \sqrt{0.06 \cdot 200} \\
\text{Lagrange-Multiplikator } \lambda^* &= 0.01732 = \sqrt{0.06/200}
\end{aligned}$$

Interpretation: Bei einer Änderung des Produktionsniveaus unter der Nebenbedingung auf $q = 201$ ist also eine Steigerung der optimalen Kosten auf etwa $6.92820 + 0.01732 = 6.94552$ zu erwarten.

Tatsächlich: Die optimalen Kosten steigen auf $C^*(201) = 2 \cdot \sqrt{0.06 \cdot 201} = 6.94550$.