universität innsbruck

Mathematik

Thema 5
Matrixalgebra

Überblick

Thema: Matrixalgebra

Inhalte	Buch
Grundbegriffe	7.1
Matrixmultiplikation	7.2
Matrizen und lineare Abbildungen	
Bedarfsmatrizen	7.3
Inverse Matrizen	7.4
Lineare Gleichungssysteme	6.2

Matrixalgebra

Grundbegriffe

Vektorschreibweise

Zeilen- und Spaltenvektoren

Vektoren, die wir als Spalten anschreiben, also z.B.

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix},$$

nennen wir **Spaltenvektoren**. Wir können Vektoren auch als **Zeilenvektoren** anschreiben, also z.B.

$$\mathbf{c} = (3, -2), \quad \mathbf{d} = (1, 0, 4).$$

Vektorschreibweise

Das Rechnen mit Vektoren

Summe und Differenz von Vektoren sowie Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl werden **komponentenweise** gebildet.

Beispiel 6.3:

Berechne $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ sowie $3\mathbf{c}$.

$$\mathbf{a}=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\\2\end{pmatrix},\mathbf{b}=\begin{pmatrix}8\\0\\-4\\1\end{pmatrix},\mathbf{c}=\begin{pmatrix}-3\\2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Vektorschreibweise

Lösung:

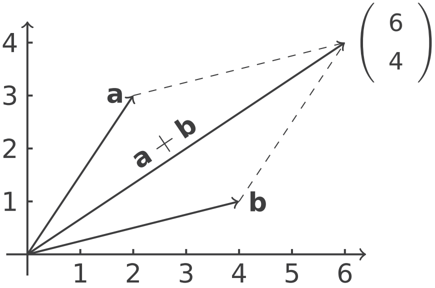
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\begin{pmatrix}1\\-5\\7\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\0\\-4\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\-5\\3\\3\end{pmatrix},$$

$$3\mathbf{c}=3\begin{pmatrix}-3\\2\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\6\\12\\0\end{pmatrix}$$

Vektorschreibweise

Geometrische Interpretation: Vektoraddition im $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

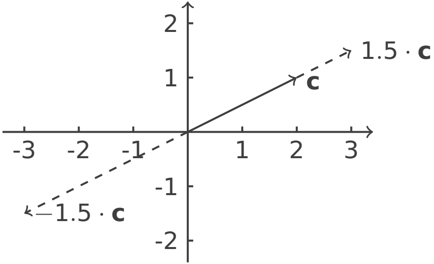


Die **Addition zweier Vektoren a** und **b** ergibt sich als **Diagonale** des von **a** und **b** aufgespannten **Parallelogramms**.

Vektorschreibweise

Geometrische Interpretation: Skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



$$-1.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1.5 \end{pmatrix} \qquad 1.5 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

Vektorschreibweise

Geometrische Interpretation: Skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^2$

Das Produkt eines Vektors $\mathbf{c}$ mit einem Skalar $s \in \mathbb{R}$ bedeutet eine **Streckung** (falls $|s| > 1$) bzw. **Stauchung** (falls $|s| < 1$) des Vektors $\mathbf{c}$. Falls $s > 0$ bleibt die Richtung erhalten, im Falle $s < 0$ ändert sich die Richtung des Vektors.

Vektorschreibweise

Musteraufgabe 6.4 – Das Rechnen mit Vektoren

Mit den Angaben von Beispiel 6.3: Bestimme einen Vektor $\mathbf{x}$ so, dass er die Gleichung $3\mathbf{a} + 5\mathbf{x} = \mathbf{b}$ erfüllt.

Lösung:

$$3\mathbf{a} + 5\mathbf{x} = \mathbf{b} \implies 5\mathbf{x} = \mathbf{b} - 3\mathbf{a} \implies \mathbf{x} = \frac{1}{5}(\mathbf{b} - 3\mathbf{a})$$

$$= \frac{1}{5}\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Vektorschreibweise

Definition 6.5: Linearkombination

Unter einer **Linearkombination** der Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ versteht man einen Ausdruck der Form

$$z = \gamma_1 \mathbf{a}_1 + \gamma_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \gamma_k \mathbf{a}_k = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \mathbf{a}_i$$

wobei $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ Zahlen sind.

Grundbegriffe

Definition 7.1: Matrix

Eine **Matrix** ist ein rechteckiges Schema von Zahlen:

$$\mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Eine $m \times n$-Matrix besteht aus m **Zeilen** und n **Spalten**.

Besitzt eine Matrix $\mathbf{A}$ so viele Zeilen wie Spalten ($m = n$), dann nennt man $\mathbf{A}$ eine **quadratische Matrix**.

Grundbegriffe

Spezielle Matrizen

Vektoren sind spezielle Matrizen.

- Ein **Spaltenvektor** der Dimension m ist eine Matrix der Ordnung $m \times 1$.
- Ein **Zeilenvektor** der Dimension m ist eine Matrix der Ordnung $1 \times m$.

Eine wichtige spezielle Matrix ist die **Einheitsmatrix**. Sie ist stets **quadratisch** und enthält in der **Hauptdiagonalen** die Zahl 1, ansonsten nur die Zahl 0:

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe

Die 2×2- Einheitsmatrix: $\mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die 3×3- Einheitsmatrix: $\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

usw.

Grundbegriffe

Elementare Rechenoperationen – Addition

Die **Addition von Matrizen** erfolgt **komponentenweise**:

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Die Summe $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ kann nur gebildet werden, wenn $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ **von gleicher Ordnung** sind. Analoges gilt für die Differenz $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Grundbegriffe

Elementare Rechenoperationen – Multiplikation mit einer Zahl

Es sei $\gamma \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl:

$$\gamma \mathbf{A} = \gamma \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a_{11} & \gamma a_{12} & \dots & \gamma a_{1n} \\ \gamma a_{21} & \gamma a_{22} & \dots & \gamma a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{m1} & \gamma a_{m2} & \dots & \gamma a_{mn} \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe

Musteraufgabe 7.2 – Elementare Rechenoperationen

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 \\ 12 & 16 & 8 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & -8 & 14 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Man bestimme $\mathbf{X}$ so, dass $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{B}$
- Man bestimme $\mathbf{X}$ so, dass $\mathbf{X} + 6\mathbf{C} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - 2\mathbf{X}\right) + 3\mathbf{B}$

Grundbegriffe

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{X} &= \mathbf{B} \qquad \Big| - \mathbf{A} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{B} - \mathbf{A} \\ &= \begin{pmatrix} 6 & 2 & 10 \\ 2 & -8 & 14 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 8 & -12 \\ 12 & 16 & 8 \\ 8 & -4 & 12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -6 & 22 \\ -10 & -24 & 6 \\ -4 & 6 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Grundbegriffe

Lösung:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X} + 6\mathbf{C} &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{A} - 2\mathbf{X}\right) + 3\mathbf{B} \\
\mathbf{X} + 6\mathbf{C} &= \frac{1}{2}\mathbf{A} - \mathbf{X} + 3\mathbf{B} && \Big| + \mathbf{X} \\
2\mathbf{X} + 6\mathbf{C} &= \frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B} && \Big| - 6\mathbf{C} \\
2\mathbf{X} &= \frac{1}{2}\mathbf{A} + 3\mathbf{B} - 6\mathbf{C} && \Big| \cdot \frac{1}{2} \\
\mathbf{X} &= \frac{1}{4}\mathbf{A} + \frac{3}{2}\mathbf{B} - 3\mathbf{C} \\
&= \begin{pmatrix} 7 & 5 & 6 \\ 0 & -11 & 23 \\ 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Grundbegriffe

Definition 7.3: Transponierte Matrix

Es sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$-Matrix. Unter der **transponierten Matrix** $\mathbf{A}^\top$ versteht man die $n \times m$-Matrix, die aus $\mathbf{A}$ durch Vertauschen der Zeilen und Spalten hervorgeht.
Alternative Schreibweisen: $\mathbf{A}^t$, $\mathbf{A}^T$ (im Buch) oder $\mathbf{A}'$.

Natürlich gilt:

$$(\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}$$

Grundbegriffe

Beispiel:

Berechne die Transponierte der Matrix $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \implies \mathbf{A}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe

Definition: Symmetrische Matrix

Eine quadratische $n \times n$-Matrix $\mathbf{A}$ heißt **symmetrisch**, wenn $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$ gilt.

Beispiel:

Ist die Matrix $\mathbf{A}$ symmetrisch?

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Grundbegriffe

Vereinbarung: Ab jetzt fassen wir Vektoren stets als **Spaltenvektoren** auf, d.h. als **einspaltige** Matrizen. Wenn wir **Zeilenvektoren** benötigen, so erhalten wir diese durch **Transponieren** eines Spaltenvektors.

$$\textbf{Spaltenvektor } \mathbf{a} \rightarrow \textbf{ Zeilenvektor } \mathbf{a}^\top$$

Matrixalgebra

Matrixmultiplikation

Matrixmultiplikation

Definition 7.6 Matrixmultiplikation

Das **Produkt zweier Matrizen** $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ergibt eine Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, die auf folgende Weise gebildet wird:

- Es wird **jede Zeile** der Matrix $\mathbf{A}$ mit **jeder Spalte** der Matrix $\mathbf{B}$ multipliziert.
- Multiplizieren einer Zeile mit einer Spalte bedeutet: Bilde die **Summe der Komponentenprodukte** von Zeile und Spalte.
- Das Produkt der **Zeile** i der Matrix $\mathbf{A}$ mit der **Spalte** j der Matrix $\mathbf{B}$ liefert das Element c_{ij} der Produktmatrix $\mathbf{C}$.

Matrixmultiplikation

Für die praktische Rechnung verwenden wir das **Falk-Schema**. In dieses tragen wir ein:

- in den **linken unteren Quadranten den linken Faktor A**
- in den **rechten oberen Quadraten den rechten Faktor B**

Anschließend bilden wir die Summe der Komponentenprodukte **jeder Zeile des linken Faktors A** mit **jeder Spalte des rechten Faktors B**.

Matrixmultiplikation

Beispiel 7.7

Gegeben seien

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Berechne $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$.

Matrixmultiplikation

Lösung: Mit Hilfe des **Falk-Schemas**.

$$
\begin{array}{ccc|cccc|}
\cline{4-7}
 & & & 2 & 0 & 1 & 3 \\
 & & & 1 & 2 & 1 & 0 \\
 & & & 1 & 3 & 2 & 4 \\
\hline
\multicolumn{1}{|c}{3} & 2 & 0 & 8 & 4 & 5 & 9 \\
\multicolumn{1}{|c}{2} & 4 & 1 & 9 & 11 & 8 & 10 \\
\multicolumn{1}{|c}{0} & 2 & 2 & 4 & 10 & 6 & 8 \\
\multicolumn{1}{|c}{4} & 1 & 0 & 9 & 2 & 5 & 12 \\
\hline
\end{array}
$$

$$
\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 5 & 9 \\ 9 & 11 & 8 & 10 \\ 4 & 10 & 6 & 8 \\ 9 & 2 & 5 & 12 \end{pmatrix}
$$

Matrixmultiplikation

Wann können Matrizen multipliziert werden?

Von zwei Matrizen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ kann das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ nur dann gebildet werden, wenn die **Zeilenlänge** (= Anzahl der Spalten) der Matrix $\mathbf{A}$ mit der **Spaltenlänge** (= Anzahl der Zeilen) der Matrix $\mathbf{B}$ übereinstimmt.

Andernfalls ist das Produkt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ **nicht definiert**.

Matrixmultiplikation

Satz 7.9: Assoziativgesetz

Für die **Matrixmultiplikation** gilt das **Assoziativgesetz**:

Es seien $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ Matrizen, die miteinander multiplizierbar sind. Dann gilt

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}).$$

Aus dem **Assoziativgesetz** folgt, dass man **Potenzen** einer quadratischen Matrix $\mathbf{A}$ bilden kann:

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2$$

Matrixmultiplikation

Satz 7.10: Distributivgesetze

Für die **Matrixmultiplikation** gelten die **Distributivgesetze**:

Sind $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ Matrizen, und sind die Produkte $\mathbf{AB}, \mathbf{AC}$ und $\mathbf{BC}$ möglich, dann gilt für die Multiplikation der Matrix $\mathbf{A}$ von links an die Summe $\mathbf{B} + \mathbf{C}$

$$\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}.$$

Für die Multiplikation von rechts gilt analog:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$$

Matrixmultiplikation

Transponierte eines Produkts

$(\mathbf{AB})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$

$(\mathbf{ABC})^\top = \mathbf{C}^\top \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$

Beispiel:

Ist die Matrix $\mathbf{A}^\top \mathbf{A}$ symmetrisch?

Lösung:

$$(\mathbf{A}^\top \mathbf{A})^\top = \mathbf{A}^\top (\mathbf{A}^\top)^\top = \mathbf{A}^\top \mathbf{A}.$$

Matrixmultiplikation

Satz 7.8: Vertauschbarkeit von Matrizen

Das Produkt von Matrizen ist im Allgemeinen **nicht kommutativ**. D.h.

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$$

Matrixmultiplikation

Beispiel:

Berechne **AB** und **BA**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -3 & 10 \\ -11 & 22 \end{pmatrix} \quad \textbf{aber} \quad \mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 13 & 18 \end{pmatrix}.$$

Matrixmultiplikation

Es gibt allerdings Ausnahmen.

Das Rechnen mit der Einheitsmatrix

Die Multiplikation mit der **Einheitsmatrix** ist immer **kommutativ**:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}.$$

Matrixmultiplikation

Multiplikation Matrix mit Spaltenvektor von rechts

$$\underset{m \times n}{\mathbf{A}} \cdot \underset{n \times 1}{\mathbf{b}} = \underset{m \times 1}{\mathbf{c}}$$

Ausführlich:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

Matrixmultiplikation

Musteraufgabe 7.16

Berechne das Produkt von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung: Mit dem **Falk-Schema**

$$\begin{array}{ccc|c} & & & 1 \\ & & & 2 \\ & & & 3 \\ \hline 1 & 2 & 3 & 14 \\ 4 & 5 & 6 & 32 \\ 7 & 8 & 9 & 50 \end{array} \qquad \Longrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 14 \\ 32 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Matrixalgebra

Matrizen und lineare Abbildungen

Matrizen und lineare Abbildungen

Lineare Abbildung

Eine **lineare Abbildung** ist eine Funktion f der Form

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2n}x_n \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \dots & + & a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

$$\text{mit} \qquad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Das Argument einer **linearen Abbildung** ist also ein n - dimensionaler Vektor $\mathbf{x}$.
Als Output ergibt sich ein m - dimensionaler Vektor $\mathbf{y}$.

Matrizen und lineare Abbildungen

Beispiel: Lineare Kostenfunktion

Stelle folgende Kostenfunktion in Vektornotation dar.

$$C(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$$

(vgl. Musteraufgabe 8.58)

Lösung:

$$C\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
$$\text{Kosten} = \text{Preis} \cdot \text{Menge}$$

Matrizen und lineare Abbildungen

Rotation eines Vektors

Die Funktion

$$f(\mathbf{x}) = f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

definiert eine Rotation von **x** um **90 Grad**.

Matrizen und lineare Abbildungen

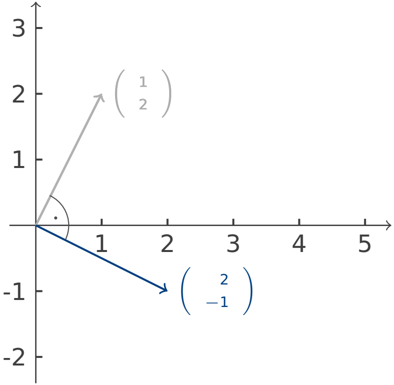
Beispiel:

Veranschauliche die Rotation des Vektors $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Matrizen und lineare Abbildungen

Lösung:

$$\mathbf{y} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Matrizen und lineare Abbildungen

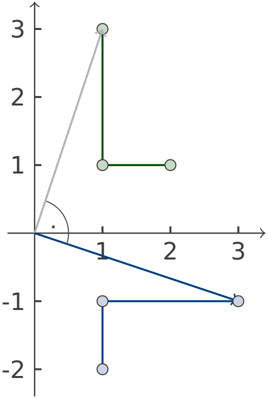
Beispiel: Rotation von drei Punkten um 90 Grad

Veranschauliche eine Rotation der drei Punkte $(1, 3)$, $(1, 1)$ und $(2, 1)$ um 90 Grad.

Matrizen und lineare Abbildungen

Lösung:

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$



Matrizen und lineare Abbildungen

Summe zweier linearer Abbildungen

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad g(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$$

Dann $\qquad (f+g)(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B}) \cdot \mathbf{x}$

Matrizen und lineare Abbildungen

Verkettung zweier linearer Abbildungen

$$f(\mathbf{z}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{z} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$$

$$g(\mathbf{x}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

Dann

$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$$

Matrizen und lineare Abbildungen

Beispiel: Zweimalige Rotation um 90 Grad

Berechne $(f \circ g)(\mathbf{x})$.

$$f(\mathbf{z}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \qquad g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Lösung:

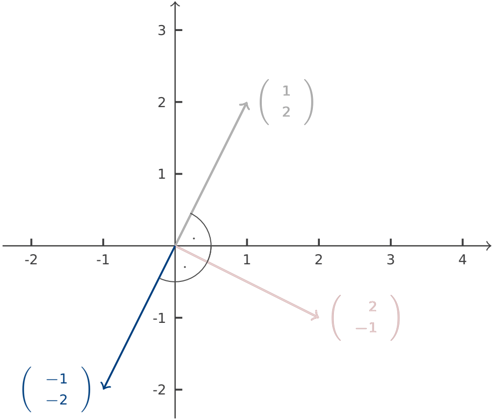
$$(f \circ g)(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x})) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

... Rotation um 180 Grad

Matrizen und lineare Abbildungen

Für $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erhalten wir $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$



Matrixalgebra

Bedarfsmatrizen

Bedarfsmatrizen

Beispiel 7.20 – Bedarfsplanung

Ein Möbelhaus bietet unter anderem auch zwei Arten von Bücherregalen zum Selbstbau an. Regaltyp A hat eine Höhe von 200 cm, Typ B ist die kleinere Variante mit einer Höhe von 110 cm. Für Typ A werden pro Stück 5 m^2 furnierte Platten verarbeitet, für Typ B braucht man 3 m^2 Platten. Die Fertigung (Zuschnitt der Platten, Bohrungen und Verpackung) erfolgt vollautomatisch. Bei Typ A nimmt die Fertigung 8 Minuten Maschinenzeit in Anspruch, bei Typ B 6 Minuten.

Berechne den Inputvektor für den Output von 50 Regalen von Typ A und 20 Regalen von Typ B.

Bedarfsmatrizen

Lösung:

Für 50 Regale von Typ A und 20 Regale von Typ B lautet der **Inputvektor**:

$$50\mathbf{a} + 20\mathbf{b} = 50 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 20 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 310 \\ 520 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{m}^2 \text{ Platten} \\ \text{Minuten Maschinenzeit} \end{matrix}$$

Matrixschreibweise

Geplanter Outputvektor: $\begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$, Bedarfsmatrix: $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

Inputvektor: $\begin{pmatrix} 310 \\ 520 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}}_{\text{Bedarfsmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 20 \end{pmatrix}$

Das ist ein Produkt **Matrix** $\times$ **Spaltenvektor**!

Bedarfsmatrizen

Interpretation der Bedarfsmatrix

Die **Spalten** der Bedarfsmatrix sind die Bedarfsvektoren der Produkte (des Outputs).

Es gilt die **Grundgleichung der Bedarfsplanung**:

$$\textbf{Inputvektor} = \textbf{Bedarfsmatrix} \cdot \textbf{Geplanter Outputvektor}$$

Die Multiplikation einer Bedarfsmatrix mit einem Vektor läßt sich als Lösung eines Bedarfsplanungsproblems interpretieren.

Bedarfsmatrizen

Musteraufgabe 7.23 – Bedarfsplanung

Ein Unternehmen fertigt unter anderem elektronische Baugruppen B_1, B_2 und B_3. Dazu werden Kondensatoren (C) und Widerstände (R) benötigt. Der Bedarf an Kondensatoren und Widerständen sowie die verfügbaren Lagerbestände sind der folgenden Tabelle zu entnehmen:

	B_1	B_2	B_3	Lager
C	5	2	9	2000
R	2	1	6	1200

Ein Auftrag sieht vor, 100 St. von B_1, 150 St. von B_2 und 120 St. von B_3 zu liefern.

- Kann der Auftrag mit den vorhandenen Lagerbeständen ausgeführt werden?
- Was ist der Lagerstand nach Ausführung des Auftrages?

Bedarfsmatrizen

Lösung (1) und (2): **Grundgleichung der Bedarfsplanung**

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \qquad \begin{array}{rcl} \mathbf{A} & = & \text{Bedarfsmatrix} \\ \mathbf{x} & = & \text{Outputvektor} \\ \mathbf{b} & = & \text{Inputvektor} \end{array}$$

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 150 \\ 120 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1880 \\ 1070 \end{pmatrix}$$

$$\text{Anfangsbestand } \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1200 \end{pmatrix}, \quad \text{Endbestand } \mathbf{e} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 120 \\ 130 \end{pmatrix}$$

Auftrag kann ausgeführt werden, $\mathbf{e} \geq \mathbf{o}$, keine Fehlmengen.

Bedarfsmatrizen

Rohstoffkosten des geplanten Outputs

Ein Hersteller produziert die Produkte $B_1, B_2, \ldots, B_n$ und benötigt hierzu die Rohstoffe $A_1, A_2, \ldots, A_r$. Die Bedarfsmatrix lautet:

$$\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_r & a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{array} \quad \rightarrow \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix}$$

Vektor der Rohstoffpreise $\quad \mathbf{p}^\top = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$

Geplante Outputmengen $\quad \mathbf{x}^\top = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

- Wie hoch sind die **Gesamtkosten** des Auftrags repräsentiert durch $\mathbf{x}$?
- Wie hoch sind die **Produktionskosten der einzelnen Produkte**?

Bedarfsmatrizen

Erforderlichen Inputmengen ergeben sich aus der **Grundgleichung der Bedarfsplanung**:

$$\mathbf{b} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$$

Kosten K für die Rohstoffmengen $\mathbf{b}$:

$$K = p_1 b_1 + p_2 b_2 + \ldots + p_r b_r = \mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{b}$$

Durch Einsetzen erhalten wir die **Gesamtkosten** des geplanten Outputs:

$$K = \mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{b} = \mathbf{p}^\top \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = (\mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$$

Bedarfsmatrizen

Produktionskosten der einzelnen Produkte

Die Gleichung

$$K = (\mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x}$$

stellt die **Gesamtkosten** dar.

Der Zeilenvektor (= Zeilenvektor × Matrix)

$$\mathbf{p}^\top \cdot \mathbf{A} = (p_1, p_2, \ldots, p_r) \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rn} \end{pmatrix} = (c_1, c_2, \ldots, c_r) = \mathbf{c}^\top$$

enthält die **Kosten der einzelnen Produkte**.

Bedarfsmatrizen

Musteraufgabe 7.24 – Bedarfsplanung

Ein Hersteller produziert zwei Produkte B_1 und B_2. Er benötigt dazu Rohstoffe A_1, A_2 und A_3. Die Produktion erfolgt an zwei verschiedenen Produktionstätten S_1 und S_2. An den beiden Standorten wird zwar diesselbe Produktionstechnologie eingesetzt, aber die Einstandspreise der Rohstoffe sind an diesen Standorten verschieden. Der Bedarf an Rohstoffen sowie deren Preise in S_1 und S_2 sind gegeben durch:

	B_1	B_2	p_1	p_2
A_1	3	4	10	9
A_2	2	1	2	3
A_3	4	6	3	4

- Wie hoch sind die Produktionskosten von B_1 und B_2 an beiden Standorten?
- Es sollen 500 St. von B_1 und 200 St. von B_2 erzeugt werden. Welche Gesamtkosten fallen an den Standorten S_1 und S_2 an?

Bedarfsmatrizen

Lösung (1):

$$\text{Produktionskosten in } S_1\text{: } \mathbf{c}_1^\top = \mathbf{p}_1^\top \cdot \mathbf{A} = (10, 2, 3)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = (46, 60)$$

$$\text{Produktionskosten in } S_2\text{: } \mathbf{c}_2^\top = \mathbf{p}_2^\top \cdot \mathbf{A} = (9, 3, 4)\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = (49, 63)$$

Bedarfsmatrizen

Lösung (2): Outputvektor $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}$,

$$\text{Gesamtkosten } K_1 = (\mathbf{p}_1^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = (46, 60) \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = 35000$$

$$\text{Gesamtkosten } K_2 = (\mathbf{p}_2^\top \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = (49, 63) \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix} = 37100$$

Matrixalgebra

Inverse Matrizen

Inverse Matrix

Das Lösen von Gleichungen

Gleichung $ax = c$.

Wir suchen eine Zahl $b = \frac{1}{a}$, so dass $b \cdot a = 1$ und

$$ax = c \;\Rightarrow\; b(ax) = bc \;\Rightarrow\; \underbrace{(ba)}_{=1}x = bc \;\Rightarrow\; x = bc.$$

Matrixgleichung $\mathbf{AX} = \mathbf{C}$:

Wir suchen eine Matrix $\mathbf{B}$ mit der Eigenschaft $\mathbf{BA} = \mathbf{I}$, so dass

$$\mathbf{B}(\mathbf{AX}) = \mathbf{BC} \;\Rightarrow\; \underbrace{(\mathbf{BA})}_{=\mathbf{I}}\mathbf{X} = \mathbf{BC} \;\Rightarrow\; \mathbf{X} = \mathbf{BC}.$$

Inverse Matrix

Definition 7.32: Invertierbarkeit

Es sei $\mathbf{A}$ eine **quadratische** Matrix der Ordnung $n \times n$. $\mathbf{A}$ heißt **regulär**, wenn es eine $n \times n$ - Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ gibt, sodass

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}.$$

In diesem Fall nennt man $\mathbf{A}^{-1}$ die **inverse Matrix** von $\mathbf{A}$.
Wenn $\mathbf{A}$ keine Inverse besitzt, dann heißt $\mathbf{A}$ **singulär**.

Inverse Matrix

Beispiel 7.33:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Wir stellen fest: $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ und $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$. Mit anderen Worten: $\mathbf{A}$ ist regulär.

Inverse Matrix

Nicht invertierbare Matrizen

Die **Nullmatrix** $\mathbf{O}$ hat keine Inverse, denn wäre $\mathbf{B}$ die Inverse von $\mathbf{O}$, so müßte gelten $\mathbf{O} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{I}$, aber:

$$\mathbf{O} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{O} \neq \mathbf{I}.$$

Die Nullmatrix ist aber nicht die einzige Matrix ohne Inverse.

Inverse Matrix

Beispiel 7.34:

Besitzt die Matrix $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ eine Inverse?

Lösung:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{21} & a_{12} + 2a_{22} \\ 2a_{11} + 4a_{21} & 2a_{12} + 4a_{22} \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

Wir erhalten durch Gleichsetzen ein lineares Gleichungssystem mit **vier Gleichungen** und **vier Unbekannten**:

$$\begin{array}{rcrcl} a_{11} & + & 2a_{21} & = & 1 \\ 2a_{11} & + & 4a_{21} & = & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} a_{12} & + & 2a_{22} & = & 0 \\ 2a_{12} & + & 4a_{22} & = & 1 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem ist allerdings **unlösbar**!

Ursache: Proportionale Spalten bzw. Zeilen!

Inverse Matrix

Satz 7.35: Eindeutigkeitssatz

Wenn eine **quadratische Matrix** eine Inverse besitzt, dann auch nur eine. Die Inverse einer quadratischen Matrix ist **eindeutig** bestimmt.

Berechnung der Inversen:

- Man kann mit einem **Algorithmus** die Inverse Matrix berechnen. Die Inverse existiert (eindeutig), wenn die sogenannte Determinante der Matrix **ungleich** Null ist.
- In der Praxis überlässt man die Berechnung der Inversen einem Computerprogramm.
- Besonders einfach ist das Invertieren einer 2×2 - **Matrix**.

Inverse Matrix

Determinanten

Die **Determinante** einer 2×2 - Matrix $\mathbf{A}$ ist definiert als:

$$\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Geometrische Interpretation der Determinante

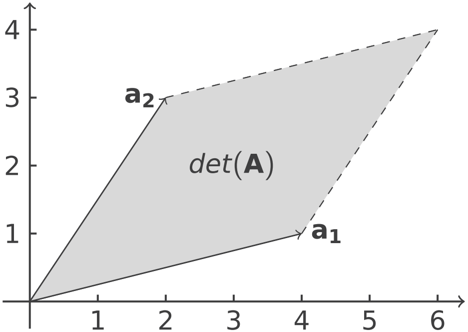
Betrachte die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und die Illustration der beiden Spalten von $\mathbf{A}$ im nachfolgenden Bild

$$\mathbf{a_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathit{und} \quad \mathbf{a_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Inverse Matrix

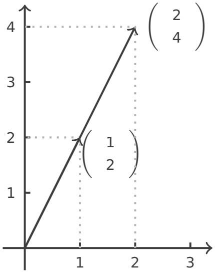


Die **Determinante** von **A** ist geometrisch die **Fläche** des von den beiden Spalten aufgespannten **Parallelogramms**.

Inverse Matrix

Offenbar ist die **Determinante** genau dann gleich **Null**, wenn eine der beiden Spalten von **A** ein **Vielfaches** der anderen Spalte ist:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$



In diesem Fall heißen die Vektoren $(a_{11}, a_{21})^\top$ und $(a_{12}, a_{22})^\top$ **linear abhängig**.

Inverse Matrix

Allgemein gilt: Die Determinante ist gleich der **“Fläche”** des von den Spalten von $\mathbf{A}$ aufgespannten **“Hyperparallelogramms”**.

Inverse Matrix

Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix

Wenn $\det \mathbf{A} \neq 0$, dann gilt:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Wenn hingegen $\det \mathbf{A} = 0$, dann besitzt **A keine Inverse**.

Siehe Beispiel 7.34.

Inverse Matrix

Musteraufgabe 7.38 – Inverse einer 2×2 - Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 28 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = ?$$

Lösung: Zuerst die **Determinante** $\det \mathbf{A} = 1 \cdot 28 - 9 \cdot 3 = 1$.

Nun: **Hauptdiagonale** vertauschen,

Nebendiagonale Vorzeichen ändern

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} 28 & -9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

Musteraufgabe 7.39 – Inverse einer 2×2-Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{A}^{-1} = ?$$

Lösung: Zuerst die **Determinante** $\det \mathbf{A} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

Nun: **Hauptdiagonale** vertauschen,

Nebendiagonale Vorzeichen ändern

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Das Lösen von Matrixgleichungen

Die einfachste Matrixgleichung ist ein **lineares Gleichungssystem**, also eine Gleichung der Form $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, wobei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Ausgeschrieben bedeutet dies somit:

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + \cdots + & a_{nn}x_n & = & b_n \end{array}$$

Inverse Matrix

Wenn **A invertierbar** ist, dann kann man die Gleichung **von links** mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren und erhält so die **eindeutige Lösung** der Gleichung:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \mathbf{b} \qquad \Big|\cdot\ \mathbf{A}^{-1} \text{von links!} \\ \mathbf{A}^{-1}\cdot\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{I}\cdot\mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \\ \mathbf{x} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \end{aligned}$$

$\mathbf{x}$ ist die **einzige Lösung**, denn die Inverse $\mathbf{A}^{-1}$ ist **eindeutig** bestimmt. Beachten Sie bitte, dass wir in dieser Matrixgleichung **ausdrücklich** verlangen, dass **A** eine **quadratische Matrix** ist. Das bedeutet, dass das Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ genauso viele Gleichungen wie Unbekannte haben muss.

Inverse Matrix

Musteraufgabe 7.41

Löse die Matrixgleichung $\mathbf{XA} = \mathbf{B}$.

Lösung:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{B} \quad \Big| \cdot \ \mathbf{A}^{-1} \text{ von rechts!} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} \cdot \mathbf{I} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ \mathbf{X} &= \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}^{-1} \end{aligned}$$

Bemerkung: Hätten wir in der Gleichung $\mathbf{X} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{B}$ **von links** mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ multipliziert, so wäre das keine Hilfe gewesen, denn

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{B} \quad \Big| \cdot \mathbf{A}^{-1} \text{ von links} \\ \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} &= \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B} \end{aligned}$$

Aber $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{X} \cdot \mathbf{A} \neq \mathbf{X}$, denn das Produkt ist **nicht kommutativ**.

Inverse Matrix

Musteraufgabe 7.43

Löse die Matrixgleichung $\mathbf{AX} + \mathbf{BX} = \mathbf{B}$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{B} && \Big| \quad \mathbf{X} \text{ nach } \textbf{rechts} \text{ herausheben!} \\
(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{X} &= \mathbf{B} && \Big| \quad \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \text{ von links} \\
(\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{X} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B} \\
\mathbf{I} \cdot \mathbf{X} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B} \\
\mathbf{X} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}
\end{aligned}$$

Inverse Matrix

Musteraufgabe 7.45

Finden Sie die Lösung $\mathbf{X}$ der Matrixgleichung $\mathbf{XA} + \mathbf{B} = \mathbf{X} + \mathbf{C}$ mit den Angaben

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & -10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ -7 & -11 \end{pmatrix}.$$

Inverse Matrix

Lösung: Die Gleichung wird zunächst umgeformt.

$$\begin{aligned} \mathbf{XA} + \mathbf{B} &= \mathbf{X} + \mathbf{C} \\ \mathbf{XA} - \mathbf{XI} &= \mathbf{C} - \mathbf{B} \\ \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{I}) &= \mathbf{C} - \mathbf{B} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird nun **von rechts** mit $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$ multipliziert:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(\mathbf{A} - \mathbf{I})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} &= (\mathbf{C} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} \\ \implies \mathbf{X} &= (\mathbf{C} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} \end{aligned}$$

Inverse Matrix

Lösung: Jetzt die numerische Rechnung $\mathbf{X} = (\mathbf{C} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1}$

$$\mathbf{C} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} -12 & 12 \\ -7 & -11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ -7 & -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Inverse Matrix

Damit erhalten wir:

$$\mathbf{X} = (\mathbf{C} - \mathbf{B})(\mathbf{A} - \mathbf{I})^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -18 & 9 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 18 & 18 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Matrixalgebra

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme

Schreibweisen

Ein allgemeines **lineares Gleichungssystem** mit m **Gleichungen** und n **Unbekannten** hat die Gestalt:

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + \cdots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + \cdots + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + \cdots + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}$$

Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}
\end{pmatrix}$$

Gleichungsmatrix

$$\left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme

Matrixnotation

$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Lösbarkeit

Ein lineares Gleichungssystem kann **unlösbar** sein, **genau eine Lösung** besitzen oder **unendlich viele Lösungen** haben.

Im Folgenden beschränken wir uns auf Fälle mit genau einer (eindeutigen) Lösung.

Lineare Gleichungssysteme

Eindeutige Lösung

Ein Gleichungssystem ist genau dann **eindeutig lösbar**, wenn $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ (genauso viele Gleichungen wie Unbekannte) und die Koeffizientenmatrix **invertierbar** ist. Die Koeffizientenmatrix ist genau dann invertierbar, wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$.

Dann:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$$

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcl} x_1 & + & 9x_2 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 28x_2 & = & 2 \end{array}$$

Lösung: In Matrixnotation $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ mit

$$\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 28 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Das Gleichungssystem ist **eindeutig lösbar**, weil $\det(\mathbf{A}) = 1 \cdot 28 - 3 \cdot 9 = 1 \neq 0$.
Die Lösung mit Hilfe der inversen Matrix $\mathbf{A}^{-1}$ (siehe Musteraufgabe 7.38) lautet:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & -9 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme

Das Gleichungssystem kann aber auch **ohne die Berechnung der Inversen** gelöst werden, z.B. durch

- das **Eliminationsverfahren**,
- die **Choleskyzerlegung** bei symmetrischen, positiv definiten Matrizen,
- oder allgemeiner mit Hilfe der **QR-Zerlegung**.

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Das Eliminationsverfahren

Mittels **erlaubter Vereinfachungsschritte** wird das Gleichungssystem schrittweise auf immer einfachere Gestalt gebracht:

Erlaubte Vereinfachungsschritte:

- Multiplikation einer Gleichung mit einer Zahl $\neq 0$.
- Vertauschen von zwei Gleichungen.
- Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung.

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Beispiel: 3 Gleichungen mit 3 Unbekannten

Erlaubte Vereinfachungsschritte – ausführliche Schreibweise

$$I: \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} Z_1 & : & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ Z_2 & : & 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ Z_3 & : & x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Wir eliminieren zuerst x_1 aus den Gleichungen Z_2 und Z_3:

$$\begin{aligned} Z_2 \to Z_4 &:= Z_2 - 2Z_1 \\ Z_3 \to Z_5 &:= Z_3 - Z_1 \end{aligned}$$

$$II: \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} Z_1 & : & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ Z_4 & : & & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ Z_5 & : & & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Nach dem 1. Eliminationszyklus hat das Gleichungssystem diese Gestalt:

$$II: \left\{ \begin{array}{ccrcrcrcr} Z_1 & : & x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ Z_4 & : & & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ Z_5 & : & & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right.$$

Wir kümmern uns nun um x_2 und:

- sorgen dafür, dass x_2 in der Gleichung Z_4 den Koeffizienten **1** erhält,
- und aus den Gleichungen Z_1 und Z_5 eliminiert wird.

$$Z_4 \to Z_6 := (-1) \cdot Z_4$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

$$
II' : \left\{ \begin{array}{llrrrrrl}
Z_1 & : & x_1 & -x_2 & - & x_3 & = & 1 \\
Z_6 & : & & x_2 & - & 3x_3 & = & -8 \\
Z_5 & : & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1
\end{array} \right.
$$

Wir eliminieren nun x_2 aus den Gleichungen Z_1 und Z_5:

$$
\begin{aligned}
Z_1 \to Z_7 &:= Z_1 + Z_6 \\
Z_5 \to Z_8 &:= Z_5 - 2Z_6
\end{aligned}
$$

$$
III : \left\{ \begin{array}{llrrrrrl}
Z_7 & : & x_1 & & - & 4x_3 & = & -7 \\
Z_6 & : & & x_2 & - & 3x_3 & = & -8 \\
Z_8 & : & & & & 5x_3 & = & 15
\end{array} \right.
$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Nach dem 2. Eliminationszyklus hat das Gleichungssystem diese Gestalt:

$$III : \left\{ \begin{array}{lcrcrcrcr} Z_7 & : & x_1 & & & - & 4x_3 & = & -7 \\ Z_6 & : & & & x_2 & - & 3x_3 & = & -8 \\ Z_8 & : & & & & & 5x_3 & = & 15 \end{array} \right.$$

Wir kümmern uns nun um x_3 und:

- sorgen dafür, dass x_3 in der Gleichung Z_8 den Koeffizienten **1** erhält,
- und aus den Gleichungen Z_6 und Z_7 eliminiert wird.

$$Z_8 \to Z_9 := Z_8 / 5$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

$$III' : \left\{ \begin{array}{ccccccc} Z_7 & : & x_1 & & -4x_3 & = & -7 \\ Z_6 & : & & x_2 & -3x_3 & = & -8 \\ Z_9 & : & & & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Wir eliminieren nun x_3 aus den Gleichungen Z_6 und Z_7:

$$\begin{aligned} Z_7 \to Z_{10} &:= Z_7 + 4Z_9 \\ Z_6 \to Z_{11} &:= Z_6 + 3Z_9 \end{aligned}$$

$$IV : \left\{ \begin{array}{cccccc} Z_{10} & : & x_1 & & = & 5 \\ Z_{11} & : & x_2 & & = & 1 \\ Z_9 & : & & x_3 & = & 3 \end{array} \right.$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Die **einzige Lösung** des Gleichungssystems lautet daher:

$$x_1 = 5, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3 \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Eliminationsverfahren – Matrixschreibweise

$$I \quad : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 10 \\ x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 0 \end{array} \right. \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

$$II \quad : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & - & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 8 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & = & -1 \end{array} \right. \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 8 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Eliminationsverfahren – Matrixschreibweise

$$III \quad : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & - & 4x_3 & = & -7 \\ & & x_2 & - & 3x_3 & = & -8 \\ & & & & 5x_3 & = & 15 \end{array} \right. \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & -4 & -7 \\ 0 & \mathbf{1} & -3 & -8 \\ 0 & 0 & 5 & 15 \end{array} \right)$$

$$IV \quad : \left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x_1 & & & & & = & 5 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ & & & & x_3 & = & 3 \end{array} \right. \quad \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 5 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 3 \end{array} \right)$$

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Definition 6.8: Strategie des Eliminationsverfahrens

Durch **erlaubte Vereinfachungsschritte** wird das Gleichungssystem auf eine **Skelettform** (oder auch **kanonische Form**) gebracht.

Eine Skelettform ist charakterisiert durch:

- Das erste von Null verschiedene Element jeder Zeile ist eine **1**. Alle anderen Elemente in der Spalte dieser **1** sind Null. Eine Spalte dieser Gestalt nennt man **Treppenstufe**.
- Diese führende **1** steht strikt **rechts** von der führenden **1** der Zeile darüber.
- Eine Zeile kann auch aus lauter Nullen bestehen.
- Die Unbekannten des Gleichungssystems, die in der Skelettform zu Treppenstufen gehören, nennt man **Basisvariable**, alle anderen Variable **Nichtbasisvariable**.

Lineare Gleichungssysteme: Eliminationsverfahren

Bemerkungen:

- Anhand der Skelettform kann man ablesen, ob ein Gleichungssystem lösbar ist und ob die Lösung eindeutig ist.
- Bei eindeutiger Lösbarkeit ist die Koeffizientenmatrix die Einheitsmatrix (d.h. alle Variablen sind Basisvariablen).

Lineare Gleichungssysteme: Flugbahn

Beispiel: Flugbahn einer Kugel

Die Flugbahn einer Kugel beim Kugelstoßen kann annähernd durch eine quadratische Funktion beschrieben werden

$$y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2,$$

wobei

x	zurückgelegte Meter der Kugel,
y	Höhe der Kugel in Metern,
b_1, b_2, b_3	Parameter der Kugelbahn.

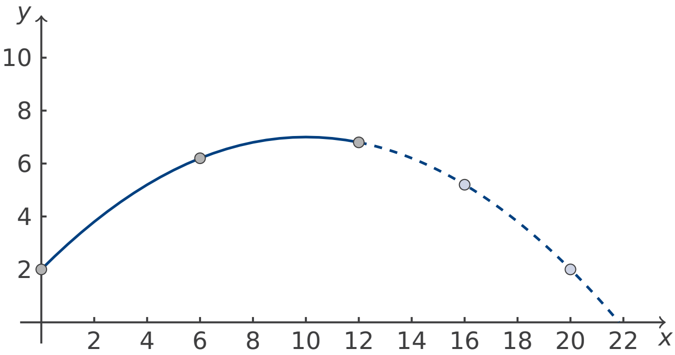
Wenn wir drei Punkte auf der Flugbahn genau kennen, können wir die Parameter b_1, b_2, b_3 bestimmen:

x_i	0	6	12
y_i	2.0	6.2	6.8

Lineare Gleichungssysteme: Flugbahn

Beispiel: Flugbahn einer Kugel

- Bestimmen Sie die Parameter b_1, b_2, b_3 der Flugbahn.
- Prognostizieren Sie die Flughöhe der Kugel nach $x = 16$ und $x = 20$ Metern.
- Welche Weite wird der Kugelstoß erzielen?



Lineare Gleichungssysteme: Flugbahn

Wir bestimmen zunächst die Parameter b_1, b_2, b_3 der Flugbahn. Für

$$y = b_1 + b_2 x + b_3 x^2$$

mit den genauen Werten

x_i	0	6	12
y_i	2.0	6.2	6.8

erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} b_1 & & & & & = & 2 \\ b_1 & + & 6b_2 & + & 36b_3 & = & \frac{31}{5} \\ b_1 & + & 12b_2 & + & 144b_3 & = & \frac{34}{5} \end{array},$$

welches wir nun mit dem **Eliminationsverfahren** lösen.

Lineare Gleichungssysteme: Flugbahn

$$I: \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} b_1 & & & & & = & 2 \\ b_1 & + & 6b_2 & + & 36b_3 & = & \frac{31}{5} \\ b_1 & + & 12b_2 & + & 144b_3 & = & \frac{34}{5} \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 6 & 36 & \frac{31}{5} \\ 1 & 12 & 144 & \frac{34}{5} \end{array}\right)$$

$$II: \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} b_1 & & & & & = & 2 \\ & & 6b_2 & + & 36b_3 & = & \frac{21}{5} \\ & & 12b_2 & + & 144b_3 & = & \frac{24}{5} \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 36 & \frac{21}{5} \\ 0 & 12 & 144 & \frac{24}{5} \end{array}\right)$$

$$III: \quad \left\{\begin{array}{rcrcrcl} b_1 & & & & & = & 2 \\ & & b_2 & + & 6b_3 & = & \frac{7}{10} \\ & & 12b_2 & + & 144b_3 & = & \frac{24}{5} \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} \mathbf{1} & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{7}{10} \\ 0 & 12 & 144 & \frac{24}{5} \end{array}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme: Flugbahn

$$IV:\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} b_1 & & & & & = & 2 \\ & & b_2 & + & 6b_3 & = & \frac{7}{10} \\ & & & & 72b_3 & = & -\frac{18}{5} \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 72 & -\frac{18}{5} \end{array}\right)$$

$$V:\ \left\{\begin{array}{rcrcrcr} b_1 & & & & & = & 2 \\ & & b_2 & + & 6b_3 & = & \frac{7}{10} \\ & & & & b_3 & = & -\frac{1}{20} \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & \frac{7}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} \end{array}\right)$$

$$VI:\ \left\{\begin{array}{rrrcr} b_1 & & & = & 2 \\ & b_2 & & = & 1 \\ & & b_3 & = & -\frac{1}{20} \end{array}\right. \rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} \end{array}\right)$$

Lineare Gleichungssysteme: Flugbahn

Somit ergibt sich die Flughöhe y nach x Metern als

$$y = 2 + x - 0.05 \cdot x^2$$

Bei $x = 16$ ist also $y = 2 + 16 - 0.05 \cdot 16^2 = 5.2$.
Bei $x = 20$ ist also $y = 2 + 20 - 0.05 \cdot 20^2 = 2.0$.

Die **Flugweite** der Kugel ist dann jener Punkt x, bei dem Kugel am Boden auftrifft, d.h. also eine Flughöhe von $y = 0$ hat. Die (positive) Nullstelle der zughörigen quadratischen Gleichung ist

$$\begin{aligned} y = 2 + x - \frac{1}{20}x^2 &= 0 \\ x &= 10 + \sqrt{140} \approx 21.83. \end{aligned}$$

Der Kugelstoß wird also etwa eine Weite von 21.83 Metern erreichen.