universität innsbruck

Mathematik

Kapitel 4

Elementare Finanzmathematik

Überblick

Inhalt: Elementare Finanzmathematik

Abschnitte	Skriptum
Arithmetische Folgen	1.3
Geometrische Folgen	2.3
Verzinsungsmodelle	2.1
Laufzeiten	2.2
Unterjährige Verzinsung	2.5
Kontinuierliche Verzinsung	2.6.2
Finanzmathematische Renten	2.4
Kontinuierliche Zahlungsströme	4.3.4

Elementare Finanzmathematik

Arithmetische Folgen

Zahlenfolgen

Eine **Zahlenfolge** ist eine Aufeinanderfolge von Zahlen, die wie folgt geschrieben werden kann:

$$(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } x_n \in \mathbb{R}$$

Die einfachste denkbare Zahlenfolge ist eine konstante Folge:

$$x_n = c \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \dots \text{ d.h. } x_1 = c, x_2 = c, x_3 = c, \dots,$$

Ein weiteres Beispiel wäre:

$$x_n = \frac{1}{n} \text{ für alle } n = 1, 2, 3, \dots \text{ d.h. } x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{1}{3}, \dots$$

Im folgenden befassen wir uns mit Folgen, bei denen die Werte sich zwar ändern, wobei aber die Veränderung selbst konstant ist, d.h. wir beschäftigen uns mit **arithmetischen** und **geometrischen** Folgen.

Arithmetische Folgen

Betrachten wir folgende zwei Beispiele von Folgen:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, \ldots$$
$$x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7, x_4 = 9, \ldots$$

Definition 1.22

Eine Zahlenfolge (x_n) ist eine **arithmetische Folge**, wenn die Differenzen $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant sind.

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 4, \ldots \qquad \Delta x_n = x_n - x_{n-1} = 1$$
$$x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7, x_4 = 9, \ldots \qquad \Delta x_n = x_n - x_{n-1} = 2$$

Arithmetische Folgen

Satz 1.23: Bildungsgesetz einer arithmetischen Folge

Eine Folge mit dem allgemeinen Glied x_n ist genau dann eine arithmetische Folge, wenn das allgemeine Glied die Form hat

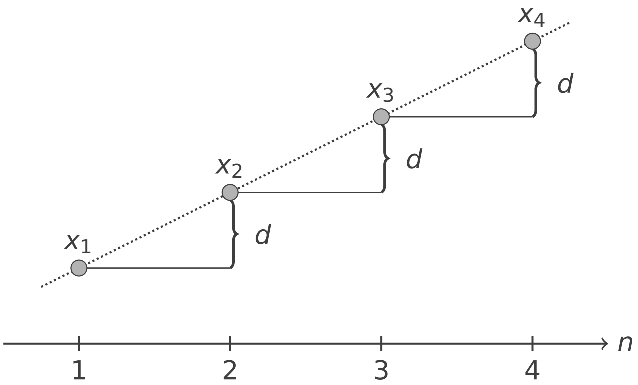
$$x_n = x_1 + (n-1)d$$

Der Term des allgemeinen Gliedes ist eine **lineare Funktion** von n.

Das Bildungsgestz für unsere zwei Beispiele lautet:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \ldots \qquad \rightarrow x_n = 1 + (n-1) \cdot 1 = n$$
$$x_1 = 3, x_2 = 5, x_3 = 7, \ldots \qquad \rightarrow x_n = 3 + (n-1) \cdot 2 = 2n + 1$$

Arithmetische Folgen



Die Folgenglieder x_n liegen also auf dem Graph einer linearen Funktion mit Steigung d.

Summierung von Folgen

Manchmal ist es von Vorteil bei $n = 0$ mit dem Zählen zu beginnen.
Die arithmetische Folge (x_n) besitzt dann das Bildungsgesetz:

$$x_n = x_0 + nd, \qquad n = 0, 1, \dots$$

Satz 1.26: Summe einer arithmetischen Folge

Die Summe der ersten n Glieder einer arithmetischen Folge $x_1, x_2, \dots, x_n$ beträgt

$$S_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = n \cdot \frac{x_1 + x_n}{2}$$

Das ist der n-fache Mittelwert aus dem ersten und dem letzten Folgenglied.

Summierung von Folgen

Musteraufgabe 1.31 – Arithmetisch degressive Abschreibung

Ein Wirtschaftsgut im Wert von 241800 GE soll innerhalb von 12 Jahren **arithmetisch degressiv** abgeschrieben werden. Das heißt, die Abschreibungsbeträge bilden eine fallende arithmetische Folge $x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,x_{12}$ mit $x_{13} = 0$.

- Wie sind die Abschreibungsbeträge zu wählen?

Lösung: Wir benötigen $n = 12$ Abschreibungsbeträge, die eine **fallende arithmetische Folge** bilden. Bezeichnet man den letzten Abschreibungsbetrag mit d, dann lautet die Folge der Abschreibungsbeträge

$$x_1 = 12d,\ x_2 = 11d,\ \ldots,\ x_{12} = d$$

Lösung Musteraufgabe 1.31

Die Summe der Abschreibungsbeträge muss dabei dem Gesamtwert entsprechen.

$$241800 = S_n = \frac{n}{2} \cdot \left(x_1 + x_n\right) = \frac{12}{2} \cdot (12d + d) = 78d$$

$$241800 = 78d \implies d = 3100$$

Erster Abschreibungsbetrag:	$x_1 \; = 12 \cdot 3100 = 37200$ GE
Zweiter Abschreibungsbetrag:	$x_2 \; = 11 \cdot 3100 = 34100$ GE
	$\dots$
Letzter Abschreibungsbetrag:	$x_{12} = 3100$ GE

Elementare Finanzmathematik

Geometrische Folgen

Geometrische Folgen

Betrachten wir nun die folgenden zwei Beispiele von Folgen:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \dots) \text{ und } (200, 100, 50, 25, 12.5, \dots)$$

Relative Differenzen

Die relative Differenz gibt den Unterschied zwischen x_n und x_{n-1} als Bruchteil (oder Prozentsatz) von x_{n-1} an.

$$\frac{\Delta x_n}{x_{n-1}} = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{x_{n-1}} - 1.$$

Die relativen Differenzen für die zwei vorherigen Beispiele sind:

$$\frac{\Delta x_n}{x_{n-1}} : \quad \frac{2-1}{1}, \frac{4-2}{2}, \frac{8-4}{4}, \dots = 1, 1, 1, \dots$$

$$\frac{\Delta x_n}{x_{n-1}} : \quad \frac{100-200}{200}, \frac{50-100}{100}, \frac{25-50}{50}, \dots = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \dots$$

Geometrische Folgen

Definition 2.19: Geometrische Folgen

Eine Zahlenfolge x_n ist eine **geometrische Folge**, wenn die **relativen Differenzen** zwischen aufeinanderfolgenden Gliedern konstant sind.

$$r = \frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{x_n}{x_{n-1}} - 1.$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = 1 + r =: q$$

Der Quotient q aufeinanderfolgender Glieder ist konstant.

Geometrische Folgen

$$(1, 2, 4, 8, 16, \dots) \text{ und } (200, 100, 50, 25, 12.5, \dots)$$

Berechnen wir den Quotienten q aufeinanderfolgender Glieder bei diesen beiden Beispielen:

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{4}, \dots = 2, 2, 2, \dots \qquad \rightarrow q = 2$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{100}{200}, \frac{50}{100}, \frac{25}{50}, \dots = \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots \qquad \rightarrow q = \frac{1}{2}$$

Geometrische Folgen

Satz 2.22: Bildungsgesetz geometrischer Folgen

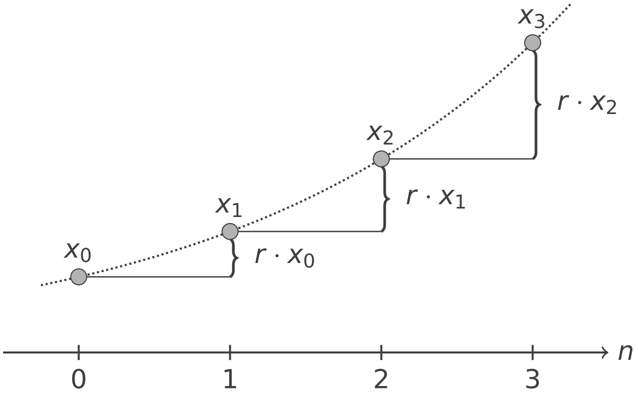
Eine Folge mit dem allgemeinen Glied x_n ist genau dann eine **geometrische Folge**, wenn das allgemeine Glied die Form hat:

$$x_n = x_0 q^n = x_0(1+r)^n$$

Begründung:

$$\begin{aligned} x_1 &= & & & x_0 q \\ x_2 &= & x_1 q &= & x_0 q^2 \\ x_3 &= & x_2 q &= & x_0 q^3 \\ & & \dots & & \\ x_n &= & &= & x_0 q^n \end{aligned}$$

Geometrische Folgen



Die Folgenglieder x_n liegen also auf dem Graph einer Exponentialfunktion mit Wachstumsfaktor q bzw. relativer Änderung r.

Geometrische Folgen

Das allgemeine Glied einer geometrischen Folge hat nun die Form:

$$x_n = x_0 q^n = x_0(1 + r)^n$$

Das Bildungsgesetz für unsere Beispiele lautet demnach:

$$(1, 2, 4, 8, 16, \dots) = (x_n = 2^n) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$(200, 100, 50, 25, 12.5, \dots) = (x_n = 200 \cdot 0.5^n) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Wirtschaftlich wichtigster Anwendungsfall: **Kapitalverzinsung**.

Summierung einer geometrische Folge

Satz 2.24: Summe einer geometrischen Folge

Die Summe der ersten n Glieder einer geometrischen Folge beträgt, falls $q \neq 1$:

$$\begin{aligned} S_n &= x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1} \\ &= x_0 + x_0 q + x_0 q^2 + \cdots + x_0 q^{n-1} = x_0 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \end{aligned}$$

Begründung: subtrahiert man die Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ccccccccc} S_n & = & x_0 & + & x_0 q & + & \ldots & + & x_0 q^{n-1} \\ S_n q & = & x_0 q & + & x_0 q^2 & + & \ldots & + & x_0 q^n \end{array}\right] -$$

so erhält man

$$S_n - S_n q = S_n(1 - q) = x_0 - x_0 q^n,$$

woraus die Formel für die Partialsummen folgt.

Summierung einer geometrische Folge

Bemerkung: Es gilt

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

denn

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \cdot \frac{-1}{-1} = \frac{-q^n + 1}{-q + 1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Elementare Finanzmathematik

Verzinsungsmodelle

Verzinsungsmodelle

K_0 : **Anfangskapital**

r : **Zinssatz**, $0 \leq r \leq 1$

Wenn am Ende der Verzinsungsperiode die **Zinsen** $K_0 r$ dem **Anfangskapital** K_0 zugeschlagen werden, dann beträgt das **Endkapital** K_1 am Ende der Periode:

$$K_1 = K_0 + K_0 r = K_0(1 + r).$$

$q = 1 + r$: **Aufzinsungsfaktor**

Grundgleichung der Finanzmathematik

$$K_1 = K_0(1 + r) = K_0 q$$

Zusammengesetzte Verzinsung

Bei **zusammengesetzter Verzinsung** entwickelt sich das Kapital nach folgendem Schema:

$$
\begin{aligned}
K_1 &= K_0 + K_0 r &&= K_0(1+r) \\
K_2 &= K_1 + K_1 r &&= K_1(1+r) &&= K_0(1+r)^2 \\
K_3 &= K_2 + K_2 r &&= K_2(1+r) &&= K_0(1+r)^3 \\
\ldots \\
K_t &= K_{t-1} + K_{t-1} r &&= K_{t-1}(1+r) &&= K_0(1+r)^t
\end{aligned}
$$

Verzinsung mit Zinseszinsen – Endwertformel

Endwert $K_t = K_0(1+r)^t = K_0 q^t$

Zusammengesetzte Verzinsung

Musteraufgabe 2.3 – Berechnung des Endwerts

Wie hoch ist der Endwert des Kapitals $K_0 = 1000$ nach 10 Jahren bei Verzinsung mit dem Zinssatz $r = 0.075$?

Lösung mit Hilfe der **Endwertformel**:

$$K_{10} = K_0(1 + r)^{10} = 1000(1 + 0.075)^{10} = 2061.03$$

Zusammengesetzte Verzinsung

Berechnung des Anfangswertes (Barwertes)

$$K_t = (1+r)^t K_0 \quad \Rightarrow \quad K_0 = K_t \frac{1}{(1+r)^t} = K_t \left(\frac{1}{1+r}\right)^t = K_t d^t$$

$d := \dfrac{1}{1+r}$ **Abzinsungsfaktor** oder **Diskontfaktor**

Musteraufgabe 2.4 – Berechnung des Barwertes

Wie hoch ist der Barwert eines Kapitals $K_{10} = 30000$ bei einem Zinssatz $r = 0.05$?

Lösung:

$$d = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1.05} = 0.95238$$

$$K_0 = K_{10}\, d^{10} = \frac{30000}{1.05^{10}} = 18417.40$$

Zusammengesetzte Verzinsung

Berechnung des Zinssatzes

$$K_t = K_0(1+r)^t \implies \frac{K_t}{K_0} = (1+r)^t \implies 1+r = \left(\frac{K_t}{K_0}\right)^{1/t}$$

$$r = \left(\frac{K_t}{K_0}\right)^{1/t} - 1$$

Musteraufgabe 2.6

Welcher Zinssatz ist nötig, damit sich ein Kapital innerhalb von 10 Jahren verdoppelt?

Lösung:

$$K_0(1+r)^{10} = 2K_0 \implies (1+r)^{10} = 2$$

$$r = 2^{1/10} - 1 = 0.07177 = 7.18\%$$

Elementare Finanzmathematik

Laufzeiten

Laufzeit von Veranlagungen

Musteraufgabe 2.14

Wie lange müssen 1000 GE zu 5% Zinseszinsen angelegt bleiben, damit das Endkapital 1500 GE beträgt?

Lösung: Einsetzen in die Endwertgleichung $K_t = K_0(1+r)^t$ liefert die **Exponentialgleichung**:

$$1500 = 1000 \cdot 1.05^t$$

Vereinfachen und logarithmieren:

$$1.5 = 1.05^t \implies \log 1.5 = t \cdot \log 1.05 \implies t = \frac{\log 1.5}{\log 1.05} = 8.31$$

Die erforderliche Laufzeit beträgt 8.31 Jahre.

Laufzeit von Veranlagungen

Musteraufgabe

Cicero setzte als Statthalter in Cilicien im Jahre 51 v. Chr. den Zinssatz wieder auf die gesetzliche Höhe von 12% herab. Dadurch sollte Brutus, der kurz vorher von der Stadt Salamis auf Cypern 48% Zinseszinsen verlangt hatte, statt der geforderten 344 Talente nur 149 erhalten.

- Wie hoch war die Schuld?
- Seit wann war sie ausgeliehen?

(Marcus Tullius Cicero lebte von 106 v. Chr. bis 43 v. Chr.)

Lösung Musteraufgabe

Wir argumentieren mit der **Endwertformel**:

ursprünglicher Plan des Brutus: $K_0 \cdot 1.48^t = 344$

nach Ciceros Intervention: $K_0 \cdot 1.12^t = 149$

Das sind zwei **nichtlineare Gleichungen** in den Unbekannten K_0 und t. Wir dividieren die erste Gleichung durch die zweite:

$$\frac{K_0 \cdot 1.48^t}{K_0 \cdot 1.12^t} = \frac{344}{149} = 2.3087$$

$$\frac{1.48^t}{1.12^t} = \left(\frac{1.48}{1.12}\right)^t = 1.3214^t = 2.3087$$

Exponentialgleichung: $1.3214^t = 2.3087$

$$t = \frac{\log 2.3087}{\log 1.3214} \approx 3 \text{ Jahre}, \qquad K_0 = \frac{149}{1.12^3} = 106.055 \approx 106 \text{ Talente}$$

Elementare Finanzmathematik

Unterjährige Verzinsung

Unterjährige Verzinsung

Es ist im Bankwesen üblich, nicht nur am Jahresende Zinsen gutzuschreiben, sondern auch zu bestimmten Stichtagen während des Jahres.

Nomineller Zinssatz

Rechnerische Größe, von der aus der Zinssatz für die unterjährige Verzinsung gebildet wird.

c : **Nomineller Jahreszinssatz**, k gleich lange Zinsperioden.

Grundgleichung unterjährige Verzinsung

Am Ende jeder Periode Verzinsung mit dem Zinssatz c/k:

$$K_1 = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k K_0$$

Unterjährige Verzinsung

Effektiver Zinssatz

Ein **äquivalenter Jahreszinssatz** r muss die Gleichung

$$1 + r = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k$$

erfüllen und beträgt daher

$$r = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k - 1.$$

Man nennt r den **effektiven Jahreszinssatz**.

Unterjährige Verzinsung

Übersicht – Endwertformel

Endwertformel: $K_t = K_0 \cdot q^t$

- **jährliche Verzinsung** mit (effektivem) Zinssatz r

  $\Rightarrow q = 1 + r$

- k**-mal pro Jahr verzinst** mit nominellem Zinssatz c

  $\Rightarrow q = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k$

Unterjährige Verzinsung

Musteraufgabe 2.39 – Effektiver Zinssatz

Eine Bausparkasse verzinst Darlehen mit dem nominellen Jahreszinssatz von 6% bei vierteljährlicher Verzinsung.

Wie hoch ist der effektive Jahreszinssatz?

Lösung:

$$r = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k - 1 = \left(1 + \frac{0.06}{4}\right)^4 - 1 = 0.06136 = 6.14 \text{ Prozent}$$

Wir beobachten, dass der effektive Jahreszinssatz **höher** ist als der nominelle Jahreszinssatz.

Unterjährige Verzinsung

Musteraufgabe 2.40 – Nomineller Zinssatz

Ein Kapital wird vierteljährlich mit dem effektiven Zinssatz von 8.5% verzinst. Wie hoch ist der nominelle Zinssatz?

Lösung:

$$1 + r = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k \implies 1 + 0.085 = \left(1 + \frac{c}{4}\right)^4$$

$$(\sqrt[4]{1.085} - 1) \cdot 4 = c$$

$$c = 0.0824$$

Der nominelle Zinssatz beträgt 8.24%.

Unterjährige Verzinsung

Weitere Übungsaufgaben 21

Man weiß, dass zwei Brüder, die vor 10 Jahren 600000 GE geerbt haben, jetzt zusammen 862100 GE besitzen.

Wieviel hatte der eine, wieviel der andere geerbt, wenn der erste sein Geld mit 4% bei ganzjähriger Verzinsung, der zweite seinen Anteil mit 3.5% bei halbjähriger Verzinsung angelegt hat?

Lösung Weitere Übungsaufgaben 21

Es seien A und B die Erbteile.
Für A und B stellen wir ein **Gleichungssystem** auf:

$$A + B = 600000$$

$$A \cdot 1.04^{10} + B \cdot \left[\left(1 + \frac{0.035}{2}\right)^2\right]^{10} = 862100$$

Wir rechnen A aus der ersten Gleichung aus und setzen in die zweite Gleichung ein: $A = 600000 - B$

$$(600000 - B) \cdot 1.04^{10} + B \cdot 1.0175^{20} = 862100$$

$$B(1.0175^{20} - 1.04^{10}) = 862100 - 600000 \cdot 1.04^{10}$$

Es ergibt sich: $A = 202136.45$, $B = 397863.56$.

Elementare Finanzmathematik

Kontinuierliche Verzinsung

Kontinuierliche Verzinsung

Wir beginnen mit einem numerischen Experiment und untersuchen den Aufzinsungsfaktor bei unterjähriger Verzinsung mit $c = 1 = 100\%$ und wachsender Zahl an Zinsterminen k:

$$q_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \quad \Longrightarrow$$

Verzinsung	k	$(1+1/k)^k$
jährlich	1	2
vierteljährlich	4	2.44
monatlich	12	2.613
wöchentlich	52	2.693
täglich	365	2.71457
stündlich	8760	2.7181207

Kontinuierliche Verzinsung

Aufzinsungsfaktoren

Ein Kapital werde mit dem nominellen Zinssatz $c > 0$ unterjährig mit k Perioden verzinst. Der Aufzinsungsfaktor beträgt für ein Jahr:

$$q_k = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k .$$

Was passiert dabei mit der Folge (q_k) der **Aufzinsungsfaktoren**?

Aufzinsungsfaktor kontinuierliche Verzinsung

$$\lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k = e^c$$

Wird ein Kapital mit nominellem Zinssatz c ein Jahr lang **kontinuierlich verzinst**, dann beträgt der Aufzinsungsfaktor für ein Jahr $q = e^c$.

Kontinuierliche Verzinsung

Illustration

Wir führen ein numerisches Experiment durch und untersuchen den Aufzinsungsfaktor bei unterjähriger Verzinsung mit $c = 0.08 = 8\%$ und wachsender Zahl an Zinsterminen k:

$$q_k = \left(1 + \frac{0.08}{k}\right)^k \quad \Longrightarrow$$

Verzinsung	k	$(1 + 0.08/k)^k$
jährlich	1	1.08
vierteljährlich	4	1.08243
monatlich	12	1.08300
wöchentlich	52	1.08322
täglich	365	1.08328
stündlich	8760	1.08329

Tatsächlich ist $e^{0.08} = 1.083287\ldots$.

Kontinuierliche Verzinsung

Endwertformel – kontinuierliche Verzinsung

Es sei $K(t)$ der Endwert eines Kapitals, das mit dem nominellen Zinssatz c kontinuierlich verzinst wird.

Der Aufzinsungsfaktor für eine Periode beträgt $q = e^c$.

Wert des Kapitals nach einer Periode: $K(1) = K(0)q = K(0)e^c$

Endwert des Kapitals zur Zeit t:

$$K(t) = K(0)q^t = K(0)\left(e^c\right)^t = K(0)e^{ct}$$

Zusammenfassung: Verzinsung

Aufzinsungsfaktor

Die Verzinsungsmodelle unterscheiden sich nur in der Berechnung des Aufzinsungsfaktors q.

- **Jährlich** mit (effektivem) Zinssatz r:

  $$q = 1 + r$$

- **Unterjährig** k-mal pro Jahr mit nominellem Zinssatz c:

  $$q = \left(1 + \frac{c}{k}\right)^k$$

- **Kontinuierlich** mit nominellem Zinssatz c:

  $$q = e^c$$

Der jeweils zugehörige Abzinsungsfaktor ist immer $d = \dfrac{1}{q}$.

Zusammenfassung: Verzinsung

Umformungen

Unabhängig vom Verzinsungsmodell (jährlich/unterjährig/kontinuierlich) gilt in Abhängigkeit des jeweiligen Aufzinsungsfaktors q:

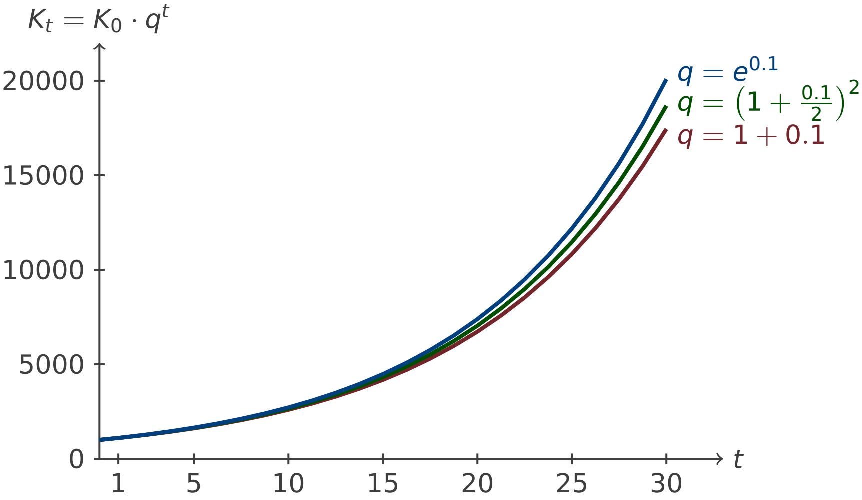
$$
\begin{aligned}
&\text{Endwert:} & K_t &= K_0 q^t \\
&\text{Barwert:} & K_0 &= K_t \tfrac{1}{q^t} = K_t d^t \\
&\text{Aufzinsungsfaktor:} & q &= \left(\tfrac{K_t}{K_0}\right)^{1/t} \\
&\text{Laufzeit:} & t &= \tfrac{\log(K_t/K_0)}{\log(q)}
\end{aligned}
$$

Zusammenfassung: Verzinsung

Vergleich: Verzinsung $K_t = K_0 \cdot q^t$ eines Startkapitals $K_0 = 1000$ Geldeinheiten bei Zinssätzen von 10% und jährlicher, halbjährlicher und kontinuierlicher Verzinsung.

	$q = 1 + 0.1$	$\left(1 + \frac{0.1}{2}\right)^2$	$e^{0.1}$
$t = 0$	1000.0	1000.0	1000.0
1	1100.0	1102.5	1105.2
2	1210.0	1215.5	1221.4
5	1610.5	1628.9	1648.7
10	2593.7	2653.3	2718.3
20	6727.5	7040.0	7389.1
30	17449.4	18679.2	20085.5

Zusammenfassung: Verzinsung



Kontinuierliche Verzinsung

Musteraufgabe 2.49

Ein Kapital von 2500 GE wird mit dem nominellen Zinssatz von 7.5 % kontinuierlich verzinst. Wie hoch ist das Kapital nach 6 Jahren?

Lösung:

Der Aufzinsungsfaktor für ein Jahr beträgt $q = e^{0.075} \implies$

$$K_6 = K_0 q^6 = 2500 \left(e^{0.075}\right)^6 = 2500 e^{0.075 \cdot 6} = 2500 e^{0.45} = 3920.78$$

Kontinuierliche Verzinsung

Musteraufgabe 2.51 – Laufzeitberechnung

Wie lange muss ein Kapital K mit einem nominellen Zinssatz von $c = 5\,\%$ kontinuierlich verzinst werden, damit es sich verdoppelt?

Lösung:

Der Aufzinsungsfaktor für ein Jahr beträgt $q = e^{0.05}$. Die erforderliche Periodenzahl t muss die Ungleichung $q^t \geq 2$ erfüllen, weil wir ja verdoppeln wollen.

Wir lösen daher die Gleichung

$$q^t = (e^{0.05})^t = e^{0.05 \cdot t} = 2.$$

Diese **Exponentialgleichung** hat die Lösung:

$$t = \frac{\log 2}{0.05 \log e} = 13.86$$

Anwendungsbeispiele

Musteraufgabe 2.60

Welcher nominelle Zinssatz ergibt bei kontinuierlicher Verzinsung einen effektiven Jahreszins von 10%?

Lösung: effektiver Zins $r = 0.1$, nomineller Zins c.

$$\begin{aligned} q &= e^c = 1 + r \\ c &= \ln(1 + r) = \ln 1.1 = 0.0953 \end{aligned}$$

Der nominelle Zinssatz muss 9.53% betragen.

Anwendungsbeispiele

Musteraufgabe 2.62 – Laufzeitberechnung

Nach wievielen Jahren wird ein Anfangskapital verdreifacht, wenn es bei einem nominellen Zinssatz von 5% kontinuierlich verzinst wird?

Lösung:

Aufzinsungsfaktor bei kontinuierlicher Verzinsung: $q = e^c$.

$$K(t) = K(0) \cdot (e^c)^t = K(0) \cdot (e^{0.05})^t = 3K(0)$$
$$e^{0.05t} = 3$$
$$0.05t \ln e = \ln 3 \qquad (\ln e = 1)$$
$$t = \frac{\ln 3}{0.05} = 21.97$$

In 22 Jahren wird das Kapital verdreifacht.

Elementare Finanzmathematik

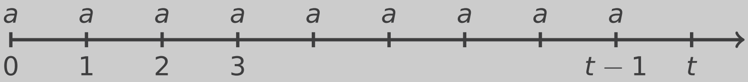
Finanzmathematische Renten

Finanzmathematische Renten

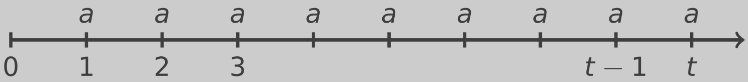
Definition: Rente

Eine **Rente** ist eine **periodische** Folge von Zahlungen, die **gleich hoch** sind.

vorschüssige Rente der Höhe a



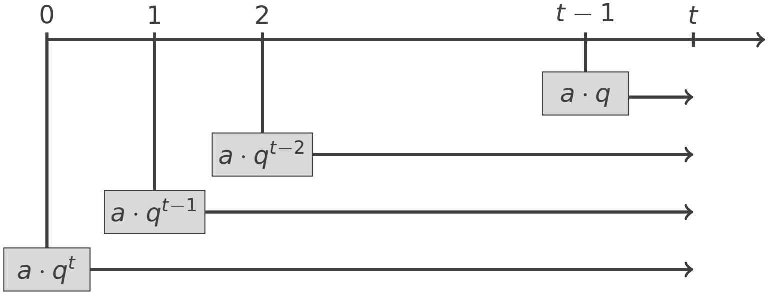
nachschüssige Rente der Höhe a



Der Endwert einer Rente

Endwert: Welchen Wert haben die periodischen Zahlungen a zu einem **zukünftigen Zeitpunkt** t (vorschüssiger Fall)?

➤ Die Zahlungen a müssen **aufgezinst** werden mit $q = 1 + r$.



Endwert der Rente $=$ Summe der Endwerte der Zahlungen.

Der Endwert einer Rente

Endwert einer Rente

Der Endwert einer **vorschüssigen** Rente ist:

$$
\begin{aligned}
E_t &= aq^t + aq^{t-1} + aq^{t-2} + \ldots + aq \\
&= aq(q^{t-1} + q^{t-2} + \ldots + 1) = a \cdot q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

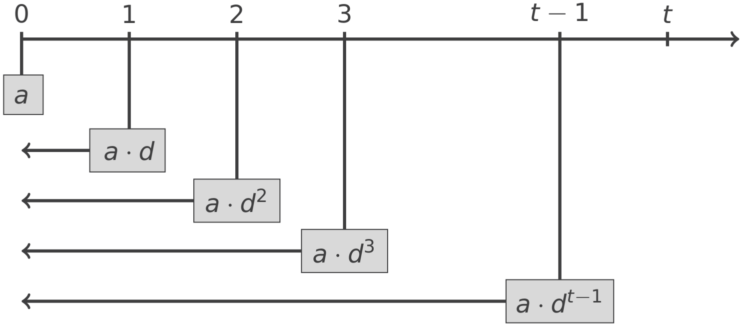
Bei der **nachschüssigen** Rente wird jede Zahlung **einmal weniger oft** aufgezinst:

$$
\begin{aligned}
E_t &= aq^{t-1} + aq^{t-2} + \ldots + aq + a \\
&= a(q^{t-1} + q^{t-2} + \ldots + 1) = a \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1}
\end{aligned}
$$

Der Barwert einer Rente

Barwert: Welchen Wert haben die Zahlungen a, die **in Zukunft** geleistet werden, aus **heutiger Sicht** (vorschüssiger Fall)?

➤ Die Zahlungen a müssen **abgezinst** werden mit $d = \dfrac{1}{1+r}$.



Barwert der Rente $=$ Summe der Barwerte der Zahlungen.

Der Barwert einer Rente

Barwert einer Rente

Der Barwert einer **vorschüssigen** Rente ist:

$$
\begin{aligned}
B_t &= a + ad + ad^2 + ad^3 + \ldots + ad^{t-1} \\
&= a(1 + d + d^2 + d^3 + \ldots + d^{t-1}) = a \cdot \frac{1-d^t}{1-d}
\end{aligned}
$$

Bei der **nachschüssigen** Rente wird jede Zahlung **einmal öfter** abgezinst:

$$
\begin{aligned}
B_t &= ad + ad^2 + ad^3 + \ldots + ad^t \\
&= ad(1 + d + d^2 + d^3 + \ldots + d^{t-1}) = a \cdot d \cdot \frac{1-d^t}{1-d}
\end{aligned}
$$

Bemerkung: Außerdem gilt genau analog zur Verzinsung $E_t = B_t \cdot q^t$.

Beispiele zu Renten

Musteraufgabe 2.28 – Laufzeit einer nachüssigen Rente

Eine Versicherungsgesellschaft bietet eine Gebäudeversicherung für Einfamilienhäuser an. Bei einem Versicherungswert (Deckungssumme) von 300000 GE beträgt die Jahresprämie, die immer am Ende des Jahres zu entrichten ist, 10100 GE. Wie viele Jahre dauert es, bis für einen bestimmten Versicherungsnehmer die zugesagte Schadenersatzleistung von 300000 GE durch die eingegangenen Prämienzahlungen und deren Zinsen (Zinssatz 4%) gedeckt ist?

Lösung : Die Prämienzahlungen sind eine nachschüssige Rente, deren Endwert zum Zeitpunkt eines Schadensfalles die Versicherungssumme decken soll.

Endwert	E	=	300000 GE
Prämie	a	=	10100 GE
Aufzinsungsfaktor	$q = 1 + r$	=	1.04

Beispiele zu Renten

Nachschüssige Rente mit
$E = 300000$ GE, $a = 10100$ GE, $q = 1.04$ und gesuchter Laufzeit $t = ?$

$$
\begin{aligned}
E &= a \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \\
\frac{E \cdot (q-1)}{a} + 1 &= q^t \\
2.1881 &= 1.04^t \\
t &= \frac{\log(2.1881)}{\log(1.04)} \\
t &\approx 20
\end{aligned}
$$

Nach etwa 20 Jahren ist das versicherte Kapital gedeckt.

Beispiele zu Renten

Musteraufgabe 2.29 – Kapitalwert einer Investition

Das Management eines Unternehmens steht vor der Entscheidung, eine neue Produktionsanlage anzuschaffen. Der Preis der Anlage beträgt 400000 GE, sie hat eine erwartete Nutzungsdauer von 10 Jahren. Wenn die Anlage in Betrieb genommen wird, generiert sie einen Netto-Cashflow von 75000 GE pro Jahr.
Ist diese Investition bei gegebenen Eckdaten ökonomisch argumentierbar?
Nehmen Sie für die Rechnung an, dass der Netto-Cashflow als Einzahlung dem Unternehmen jeweils am Jahresende zufließt und berücksichtigen Sie einen Kalkulationszinssatz von 5%.

Lösung: Die ins Auge gefasste Investition ist rentabel, wenn der Barwert des Netto-Cashflows **höher** als die Anschaffungskosten und damit der Kapitalwert **positiv** ist.

Lösung zu Musteraufgabe 2.29

Investitionssumme	I	=	400000 GE
Netto-Cashflow	a	=	75000 GE
Laufzeit	t	=	10 Jahre
Abzinsungsfaktor	$d = \frac{1}{1+r}$	=	$\frac{1}{1.05}$

$$B = ad\,\frac{1-d^t}{1-d} = 75000 \cdot \frac{1}{1.05} \cdot \frac{1-(1/1.05)^{10}}{1-1/1.05} = 579130$$

Der Kapitalwert bezeichnet die Differenz

$$B - I = 579130 - 400000 = 179130$$

Somit ist dieser positiv und die Anschaffung ist ökonomisch rentabel.

Beispiele zu Renten

Musteraufgabe 2.30 – Prämie einer vorschüssigen Rente

Jemand bietet ein Haus zu einem Preis von 420000 GE zum Verkauf an. Ein Kaufinteressent bietet an, diesen Betrag in fünf gleichen Jahresraten a zu erstatten, wobei die erste Rate sofort bezahlt wird, die weiteren jeweils am Beginn der Folgejahre. Wie hoch muss die Jahresrate a sein, wenn der Rechnung ein Zinssatz von 3% zugrunde gelegt wird?

Lösung :

Barwert	B	=	420000 GE
Laufzeit	t	=	5 Jahre
Aufzinsungsfaktor	$d = \frac{1}{1+r}$	=	$\frac{1}{1.03}$

$$B = a \cdot \frac{1-d^t}{1-d} \quad \Longrightarrow \quad a = \frac{B(1-d)}{1-d^t} = 89037.79$$

Die jährliche zu erstattende Rate beträgt 89037.79 GE.

Ewige Renten

Um eine **vorschüssige Rente** von a GE t-mal auszahlen zu können, benötigen wir ein Kapital in der Höhe des **Barwerts**

$$B_t = a \cdot \frac{1-d^t}{1-d}, \qquad d = \frac{1}{1+r} = \text{ Abzinsungsfaktor}$$

Wir stellen uns nun die Frage, welches Kapital B_∞ wir benötigen, um die Rente **ewig** auszahlen zu können.
Wenn die Rente ewig bezahlt werden soll, darf das Kapital nicht sinken. Es muss also der **periodische Zinsgewinn** identisch sein mit der **periodischen Auszahlung**:

$$(B_\infty - a) \cdot r = a$$

Wenn wir diese Gleichung nach B_∞ lösen und vereinfachen (siehe Skriptum), erhalten wir eine weitere **Barwertformel**.

Ewige Renten

Barwert einer ewigen Rente

Der Barwert einer **vorschüssigen** ewigen Rente ist gegeben durch:

$$B_\infty = \frac{a}{1-d}, \qquad d = \frac{1}{1+r} = \text{ Abzinsungsfaktor}$$

Werden die Zahlungen der Rente **nachschüssig** geleistet, muss jede Zahlung **einmal öfter** abgezinst werden:

$$B_\infty = \frac{a \cdot d}{1-d}$$

Ewige Renten

Musteraufgabe 2.35

Welches Kapital ist nötig, um beim Zinssatz von 8% eine vorschüssige ewige Rente in der Höhe von 1000 GE finanzieren zu können?

Lösung:

Mit $d = \dfrac{1}{1.08}$ ergibt sich:

$$B_\infty = \frac{1000}{1 - \frac{1}{1.08}} = 13500$$

Ewige Renten

Musteraufgabe 2.36 – Umwandlung einer ewigen Rente

Der Betreiber eines Einkaufmarktes hat seinen Kundenparkplatz auf einem gepachteten Grundstück angelegt. Der Pachtvertrag ist unbefristet, die jährliche, am Jahresende zu bezahlende Pacht für das Grundstück beträgt 200000 GE. Das Management des Marktes möchte das Grundstück käuflich erwerben, um so die dauerhafte finanzielle Belastung durch den Pachtzins aus der Welt zu schaffen. Bei einem langfristigen Marktzins von 4%:

- Was wäre ein fairer Kaufpreis?
- Was wäre die zu bezahlende (nachschüssige Rate, wenn dieser Kaufpreis fünf Jahre gleichmäßig verteilt wird?

Ewige Renten

Zu beachten:

- Der unbefristete Pachtvertrag stellt eine **ewige Rente** dar.
- Der finanzmathematische Wert des Pachtvertrags ist der **Barwert** dieser ewigen Rente.
- Diese ewige Rente soll in eine Rente mit 5 Jahren Laufzeit aber **gleichem Barwert** umgewandelt werden.

Lösung: Abzinsungsfaktor $d = \frac{1}{1+r} = \frac{1}{1.04}$.

Barwert der nachschüssigen ewigen Rente $a = 200000$:

$$B_\infty = \frac{a \cdot d}{1-d} = 5000000 \text{ GE}$$

Das ist der finanzmathematische Wert des unbefristeten Pachtvertrags bzw. der faire Kaufpreis.

Lösung Musteraufgabe 2.36

Barwert einer **nachschüssigen Rente** mit Zahlung R und 5 Jahren Laufzeit:

$$B_5 = R \cdot d \cdot \frac{1 - d^5}{1 - d}$$

Umwandeln der Rente: $B_\infty = B_5 \implies$

$$\frac{a \cdot d}{1 - d} = R \cdot d \cdot \frac{1 - d^5}{1 - d}$$

$$\implies R = \frac{a}{1 - d^5} = \frac{200000}{1 - 1/1.04^5} = 1123135.57 \text{ GE}$$

Durch Zahlungen von jährlich 1123136 GE kann das Unternehmen das Grundstück in 5 Jahren käuflich erwerben.

Elementare Finanzmathematik

Kontinuierliche Zahlungsströme

Kontinuierliche Zahlungsströme

Idee:

- Wir kennen die kontinuierliche Veränderung eines Kapitals in Form der ersten Ableitung ($K'(t)$) und berechnen aus dieser Veränderung das Kapital zu einem Zeitpunkt T, d.h. $K(T)$.
- Die kontinuierliche Veränderung eines Kapitals könnte zum Beispiel von einem kontinuierlichen Ansparen, einer konstanten Tilgung oder einer kontinuierlichen Verzinsung herrühren.
- Zuerst betrachten wir den einfacheren Fall einer gegebenen **Veränderungsrate** des Kapitals (ohne explizite Berücksichtigung der Verzinsung des Kapitals).

Kapitalentwicklung bei gegebener Veränderungsrate

Es sei $K(t)$ die Höhe eines Kapitals, das sich im Zeitintervall $[0, T]$ verändert und $a(t)$ sei seine **Veränderungsrate**.

Lösungsansatz:

$$
\begin{aligned}
K'(t) &= a(t) \\
\int_0^T K'(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t \\
K(T) - K(0) &= \int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t \\
\mathbf{K(T)} &= \mathbf{K(0)} + \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}} \mathbf{a(t)}\,\mathrm{d}\mathbf{t}
\end{aligned}
$$

Kapitalentwicklung bei gegebener Veränderungsrate

Beispiel

Ein Kapital in der Höhe von 1000 GE wird mit der Rate $a(t) = 3$ erhöht. Wie hoch ist das Kapital nach 10 Perioden?

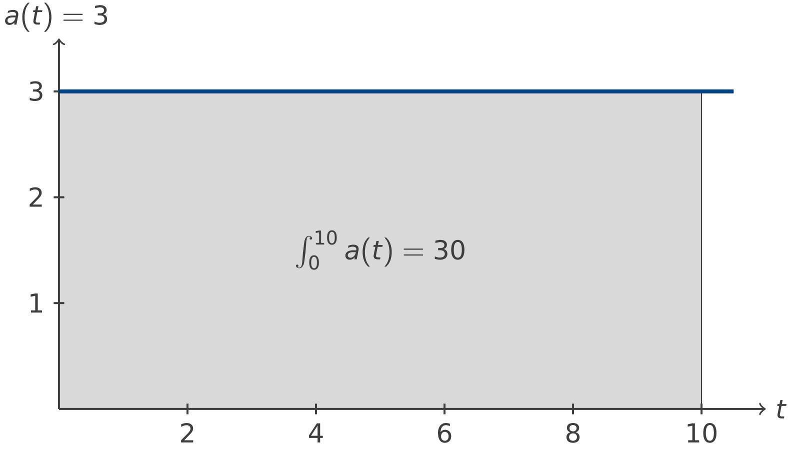
Lösung:

Aus der Angabe: $K'(t) = a(t) = 3$.

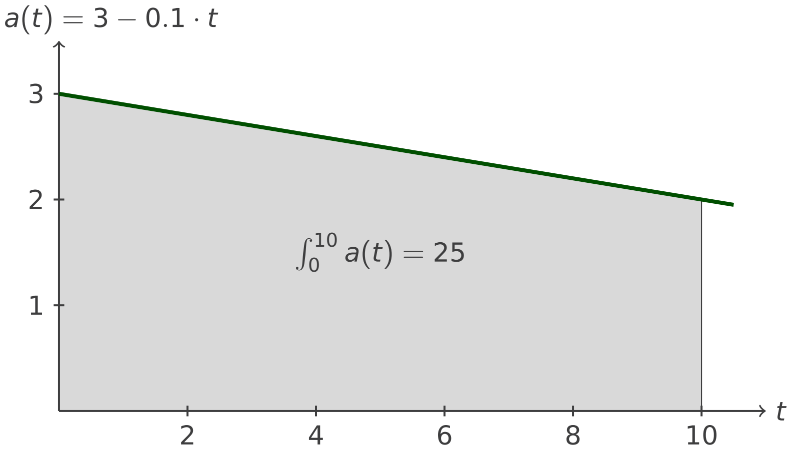
$$K(10) = K(0) + \int_0^{10} a(t)\,\mathrm{d}t = 1000 + \int_0^{10} 3\,\mathrm{d}t$$

$$= 1000 + (3t)\Big|_0^{10} = 1000 + 30 = 1030$$

Kapitalentwicklung bei gegebener Veränderungsrate



Kapitalentwicklung bei gegebener Veränderungsrate



Kapitalentwicklung bei gegebener Veränderungsrate

Musteraufgabe 4.30

Ein Kapital in der Höhe von 1000 GE wird mit der Rate $a(t) = 3 - 0.1t$ erhöht.
Wie hoch ist das Kapital nach 10 Perioden?

Lösung:

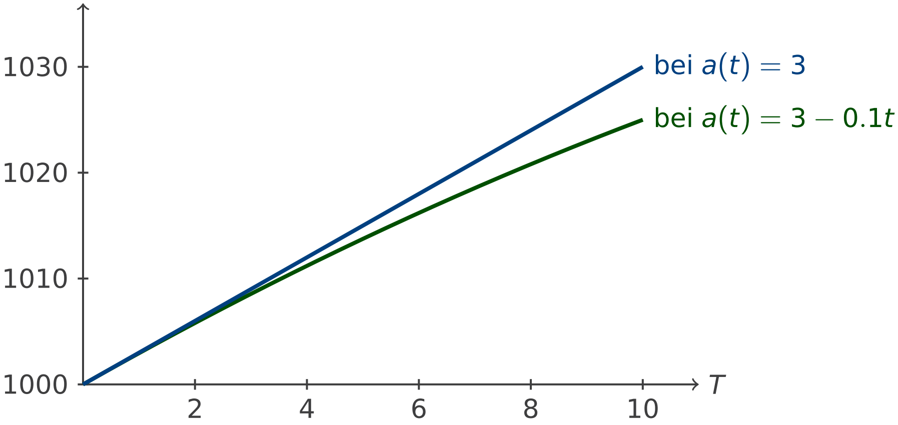
Aus der Angabe: $K'(t) = a(t) = 3 - 0.1t$.

$$K(10) = K(0) + \int_0^{10} a(t)\,\mathrm{d}t = 1000 + \int_0^{10} (3 - 0.1t)\,\mathrm{d}t$$

$$= 1000 + (3t - 0.05t^2)\Big|_0^{10} = 1000 + 30 - 5 = 1025$$

Kapitalentwicklung bei gegebener Veränderungsrate

$K(T) = 1000 + \int_0^T a(t)\mathrm{d}t$



Kontinuierliche Verzinsung und Kapitalzufluss

Ein Kapital $K(t)$ wird mit dem Zinssatz c **kontinuierlich** verzinst und zusätzlich fließt dem Kapital Geld mit der Rate $a(t)$ zu.

Die Veränderungsrate des Kapitals durch Verzinsung allein beträgt

$$K'(t) = cK(t)$$

Wird der Zufluss berücksichtigt, dann ergibt sich:

$$K'(t) = cK(t) + a(t)$$

Die ist eine sogenannte **Differentialgleichung**. Diese sind im Allgemeinen schwer zu lösen.

Hier ist die Lösung aber vergleichsweise einfach und wir können aus der Veränderungsrate des Kapitals $K'(t)$ wieder das Kapital $K(t)$ ausrechnen.

Kontinuierliche Verzinsung und Kapitalzufluss

$$
\begin{aligned}
K'(t) &= cK(t) + a(t) && \text{Abzinsen: } \cdot e^{-ct} \\
e^{-ct}K'(t) &= e^{-ct}cK(t) + e^{-ct}a(t) \\
e^{-ct}K'(t) - e^{-ct}cK(t) &= e^{-ct}a(t) \\
\left(e^{-ct}K(t)\right)' &= e^{-ct}a(t) && \text{Aggregieren: } \int \, \mathrm{d}t \\
\int_0^T \left(e^{-ct}K(t)\right)' \, \mathrm{d}t &= \int_0^T e^{-ct}a(t)\,\mathrm{d}t \\
e^{-cT}K(T) - K(0) &= \int_0^T e^{-ct}a(t)\,\mathrm{d}t \\
e^{-cT}K(T) &= K(0) + \int_0^T e^{-ct}a(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Dies ist der **Barwert** $B(T)$ einer **kontinuierlichen Rente**, d.h. die Aggregation (mit Integral statt Summe) der abgezinsten Zahlungen $a(t)$.

Endwert und Barwert

Endwert und Barwert kontinuierlicher Zahlungsströme

Für den **Barwert** eines Kapitals mit dem Anfangswert $K(0)$ gilt bei kontinuierlicher Verzinsung mit c und einem Zufluss von $a(t)$:

$$B(T) = e^{-cT} K(T) = K(0) + \int_0^T e^{-ct} a(t)\, \mathrm{d}t$$

Den **Endwert** erhalten wir durch **Aufzinsen** mit dem Faktor e^{cT}:

$$K(T) = e^{cT} K(0) + \int_0^T e^{c(T-t)} a(t)\, \mathrm{d}t$$

Anwendungen

Musteraufgabe 4.31

Wie hoch ist der Endwert eines Zahlungsstroms mit der konstanten Rate $a(t) = 2000$ und dem Zinssatz $c = 0.05$ nach 10 Jahren?

Lösung:

$$K(10) = \int_0^{10} e^{0.05(10-t)} 2000 \, dt = 2000 \int_0^{10} e^{0.5-0.05t} \, dt = 25948.85$$

Erinnerung:

$$\int e^{ax+b} \, dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

Deshalb ist:

$$\int_0^{10} e^{0.5-0.05t} \, dt = -\frac{1}{0.05} e^{0.5-0.05t} \Big|_0^{10} = 12.9744$$

Anwendungen

Musteraufgabe 4.33

Wie hoch muss eine konstante Tilgungsrate sein, damit eine Schuld von 50000 GE nach 10 Jahren getilgt ist? Nomineller Zinssatz 5 Prozent.

Lösung: Die **konstante Tilgungsrate** muss den Endwert

$$0 = 50000e^{0.05\cdot 10} + \int_0^{10} e^{0.05(10-t)}(-a)\,\mathrm{d}t$$

produzieren. Durch den **Aufzinsungsfaktor** $e^{0.5}$ dividieren:

$$0 = 50000 - a\int_0^{10} e^{-0.05t}\,\mathrm{d}t$$

Also ist

$$a = \frac{50000}{\int_0^{10} e^{-0.05t}\,\mathrm{d}t} = 6353.74$$

Anwendungen

Musteraufgabe

Herr Meyer zahlt für seine Altersvorsorge pro Jahr steigende Beiträge ein, die beginnend mit 10000 GE jährlich um 1000 GE anwachsen. An Bankzinsen erhält Herr Meyer 8 Prozent pro Jahr. Man berechne mit einem kontinuierlichen Zahlungsmodell den Endwert der Zahlungen nach 30 Jahren.

Lösung: Der Zahlungsstrom lautet $a(t) = 10000 + 1000t$. Damit beträgt der Endwert

$$\begin{aligned} K(30) &= \int_0^{30} e^{0.08(30-t)}(10000 + 1000t)\,\mathrm{d}t \\ &= 10000 \int_0^{30} e^{2.4-0.08t}\,\mathrm{d}t + 1000 \int_0^{30} e^{2.4-0.08t} \cdot t\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Lösung Musteraufgabe

Integrationsregel

Zur Lösung der Aufgabe benötigen wir folgende Integrationsregel:

$$\int x \cdot e^{ax+b}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax+b} + C.$$

Begründung:

$$\begin{aligned}
\left(\left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{ax+b} + C\right)' &= \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b} + \left(\frac{x}{a} - \frac{1}{a^2}\right) \cdot e^{ax+b} \cdot a \\
&= \left(\frac{1}{a} + x - \frac{1}{a}\right) \cdot e^{ax+b} \\
&= x \cdot e^{ax+b}
\end{aligned}$$

Lösung Musteraufgabe

Das erste Integral berechnen wir wieder als

$$\int_0^{30} e^{2.4-0.08t}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{0.08}e^{2.4-0.08\cdot t}\bigg|_0^{30} = 125.2897.$$

Und das zweite Integral erhalten wir nun als

$$\int_0^{30} e^{2.4-0.08t}\cdot t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t}{-0.08} - \frac{1}{(-0.08)^2}\right)e^{2.4-0.08\cdot t}\bigg|_0^{30}$$

$$= 1191.121.$$

Der Endwert beträgt damit

$$10000\cdot 125.2897 + 1000\cdot 1191.121 = 2444018.$$