universität innsbruck

Mathematik

Kapitel 3
Integralrechnung

Überblick

Inhalt: Integralrechnung

Abschnitte	Skriptum
Stammfunktionen	4.1
Einfache Integrationsregeln	4.2
Anwendungen	4.3

Integralrechnung

Stammfunktionen

Stammfunktionen

Definition 4.1: Stammfunktion

Es sei $F(x)$ eine differenzierbare Funktion und es sei $f(x) = F'(x)$ ihre Ableitung. Dann nennt man F eine **Stammfunktion** von f.

Beispiel 4.2

$F(x) = x^2$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$.
Aber auch $G(x) = x^2 + 3$ ist eine Stammfunktion von $f(x) = 2x$.

Stammfunktionen

Satz 4.3

Sind $F(x)$ und $G(x)$ zwei Stammfunktionen ein- und derselben Funktion $f(x)$, dann unterscheiden sich F und G nur um eine additive Konstante, d.h. $F(x) = G(x) + C$.

Begründung:

$F'(x) = G'(x) \implies F'(x) - G'(x) = 0$

Das bedeutet: $F(x) - G(x)$ muss **konstant** sein, denn die Ableitung einer Konstanten ist Null.

Stammfunktionen

Bestimmtes Integral

Es sei $f(x)$ eine Funktion, die eine Stammfunktion $F(x)$ besitzt und es seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann nennt man

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

das **bestimmte Integral** von f zwischen den Grenzen a und b.
Wenn Integrationsgrenzen **vertauscht** werden, ändert sich das Vorzeichen:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

Schreibweise für das **unbestimmte Integral**:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := F(x) + C$$

Stammfunktionen

Bemerkung: Für das bestimmte Integral ist die Wahl der Konstante C in der Stammfunktion irrelevant, denn für eine Stammfunktion $G(x) = F(x) + C$ gilt:

$$
\begin{aligned}
\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= G(b) - G(a) \\
&= (F(b) + C) - (F(a) + C) \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}
$$

Daher wird häufig auch beim unbestimmten Integral die Konstante C weggelassen.

Integralrechnung

Einfache Integrationsregeln

Integrationsregeln

Satz 4.7: Potenzen

Es sei $\alpha \neq -1$, dann gilt:

$$(x^{\alpha+1})' = (\alpha+1)x^{\alpha} \quad \Longrightarrow \quad \int x^{\alpha}\,\mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

Musteraufgabe 4.8

Man bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = x^5$ und berechne $\displaystyle\int_{-2}^{3} x^5\,\mathrm{d}x$.

Lösung: $F(x) = \displaystyle\int x^5\,\mathrm{d}x = \frac{x^6}{6} + C$

$$\int_{-2}^{3} x^5\,\mathrm{d}x = \left(\frac{x^6}{6}\right)\Bigg|_{-2}^{3} = \frac{3^6}{6} - \frac{(-2)^6}{6} = \frac{665}{6} = 110.833$$

Integrationsregeln

Musteraufgabe 4.9

- Man bestimme eine Stammfunktion von $g(u) = \dfrac{1}{\sqrt{u}}$
- Man berechne $\displaystyle\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u$.

Lösung:

$$F(u) = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = \int u^{-1/2}\,\mathrm{d}u = 2u^{1/2} + C = 2\sqrt{u} + C$$

$$\int_1^{10} \frac{1}{\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u = 2\sqrt{u}\,\Big|_1^{10} = 2\sqrt{10} - 2\sqrt{1} = 4.325$$

Integrationsregeln

Satz 4.10: Summensatz

$$\int [af(x) + bg(x)]\,\mathrm{d}x = a\int f(x)\,\mathrm{d}x + b\int g(x)\,\mathrm{d}x$$

Musteraufgabe 4.11

- Man bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = 3x^2 - 5 + \frac{1}{x^3}$.
- Man berechne $\int_3^7 f(x)\,\mathrm{d}x$.

$$F(x) = \int \left(3x^2 - 5 + \frac{1}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x = x^3 - 5x - \frac{1}{2x^2} + C$$

$$\int_3^7 \left(3x^2 - 5 + \frac{1}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x = \left(x^3 - 5x - \frac{1}{2x^2}\right)\Big|_3^7 = 296.045$$

Integrationsregeln

Satz 4.12: Exponentialfunktion und Logarithmus

Für **Exponentialfunktion** und **Logarithmus** gilt:

$$(e^x)' = e^x \quad \Longrightarrow \quad \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C$$

$$\int e^{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x + C, \quad x > 0$$

$$\int \frac{1}{ax+b} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C$$

Integrationsregeln

Musteraufgabe 4.20

- Man bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = e^{-2x+3}$
- Man berechne $\int_1^5 e^{-2x+3}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

$$\int e^{-2x+3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x+3} + C$$

$$\int_1^5 e^{-2x+3}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}e^{-2x+3}\Big|_1^5 = -\frac{1}{2}e^{-7} + \frac{1}{2}e^{1} = 1.3587$$

Integrationsregeln

Musteraufgabe 4.21

Man berechne $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x$

Lösung:

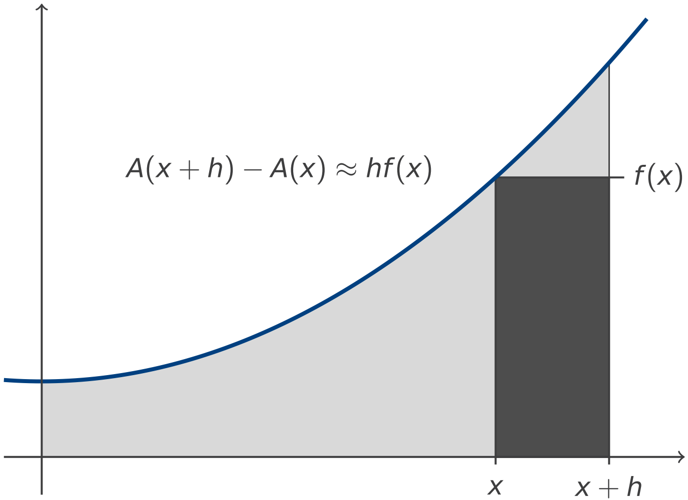
$$\int \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2x+1) + C$$

$$\int_1^2 \frac{1}{2x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln(2x+1)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 3 = 0.2554$$

Integralrechnung

Anwendungen

Anwendungen der Integralrechnung



Anwendungen der Integralrechnung

Flächeninhalte

Es sei $f(x)$ eine Funktion und $A(x)$ der **Flächeninhalt** unter dem Graphen der Funktion entlang des Intervalls $[0, x]$. Dann ist

$$A(x+h) - A(x) \approx f(x)h$$

und für $h \to 0$ folgt $A'(x) = f(x)$.

Der Flächeninhalt $A(x)$ ist also eine Stammfunktion von $f(x)$.

$$A(b) - A(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Anwendungen der Integralrechnung

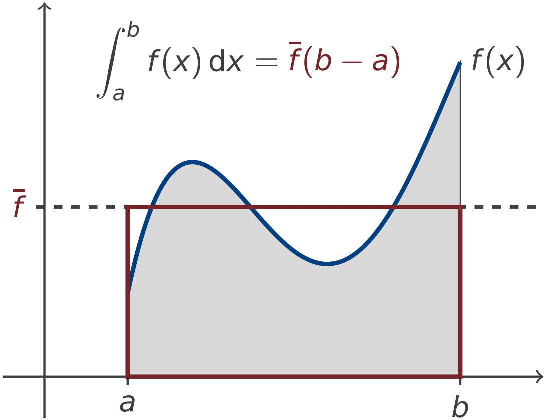
Musteraufgabe 4.25

Man berechne den Flächeninhalt unter der Funktion $f(x) = e^{-2x}$ zwischen den Grenzen $x = 0$ und $x = 10$.

Lösung:

$$\int_0^{10} e^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,e^{-2x}\Big|_0^{10} = -\frac{1}{2}\,e^{-20} + \frac{1}{2} = 0.5000$$

Anwendungen der Integralrechnung



Durchschnittswert

Der Durchschnittswert $\bar{f}$ einer Funktion f auf einem Intervall $[a, b]$ ist die **Höhe eines Rechtecks**, das den gleichen Flächeninhalt einschließt wie der Funktionsgraph.

$$(b-a)\bar{f} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Longrightarrow \quad \bar{f} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Musteraufgabe 4.26

- Berechne den Durchschnittswert von $f(x) = x$ auf dem Intervall $[0, 5]$.
- Berechne den Durchschnittswert von $f(x) = e^{-x}$ auf dem Intervall $[0, 5]$.

Lösung:

$$\frac{1}{5}\int_0^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}\,\frac{x^2}{2}\bigg|_0^5 = 2.5$$

$$\frac{1}{5}\int_0^5 e^{-x}\,\mathrm{d}x = -\frac{e^{-x}}{5}\bigg|_0^5 = \frac{1-e^{-5}}{5} = 0.1987$$

Anwendungen der Integralrechnung

Musteraufgabe – Grenzkosten

Ein Unternehmen produziert den Output x mit folgenden Grenzkosten:

$$C'(x) = 3x^2 - 6x + 14.$$

Bei einem Output von 10 Einheiten betragen die Kosten $C(10) = 2840$ GE.
Wie hoch sind die Kosten bei einem Output von 20 Einheiten?

Lösung: Bildung der Stammfunktion der Grenzkostenfunktion.

$$\begin{aligned} C(x) &= \int C'(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int 3x^2 - 6x + 14\,\mathrm{d}x \\ &= x^3 - 3 \cdot x^2 + 14 \cdot x + c \end{aligned}$$

Anwendungen der Integralrechnung

Bestimmung der Konstante c (Fixkosten) durch Einsetzen der Angabe.

$$\begin{aligned} 2840 &= C(10) \\ &= 10^3 - 3 \cdot 10^2 + 14 \cdot 10 + c \\ &= 840 + c \\ 2000 &= c \end{aligned}$$

Gesuchte Kosten:

$$\begin{aligned} C(20) &= 20^3 - 3 \cdot 20^2 + 14 \cdot 20 + 2000 \\ &= 9080 \end{aligned}$$