universität innsbruck

Mathematik

Thema 2
Differentialrechnung

Überblick

Thema: Differentialrechnung

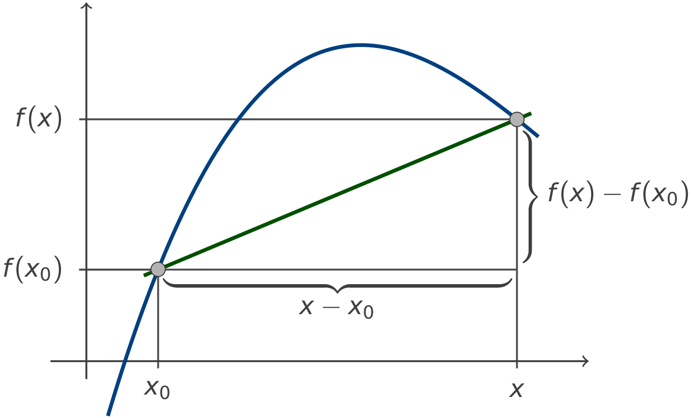
Inhalte	Buch
Ableitung einer Funktion	3.1
Differenzieren	3.2
Kurvendiskussion	3.4
Optimierung einer Funktion mit einer Variablen	3.5
Funktionen mit zwei Variablen	8.3
Die erste Ableitung	8.4
Optimierung unter Nebenbedingungen	8.8

Differentialrechnung

Ableitung einer Funktion

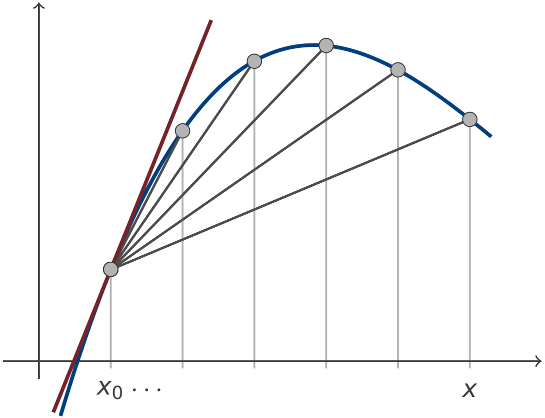
Ableitung einer Funktion

Steigungsverhältnis = **Differenzenquotient** = $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Ableitung einer Funktion

Ableitung $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$



Ableitung einer Funktion

Definition 3.2: Ableitung einer Funktion

Es sei f eine Funktion auf einem Intervall und x_0 sei ein innerer Punkt des Intervalls.

Der Grenzwert des Differenzenquotienten für $x \to x_0$ heißt **Ableitung** der Funktion f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet:

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Geometrische Deutung der Ableitung

Die **Ableitung** einer differenzierbaren Funktion an einer Stelle x_0 ist gleich der **Steigung der Tangente** an den Funktionsgraphen an der Stelle x_0.

Ableitung einer Funktion

Beispiel 3.3: Ableitung einer linearen Funktion

Die Ableitung einer linearen Funktion $f(x) = ax + b$ ist an jeder Stelle konstant $f'(x) = a$.

Jeder Differenzenquotient ist konstant und hat den Wert

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{ax + b - ax_0 - b}{x - x_0} = \frac{a(x - x_0)}{x - x_0} = a.$$

Daher ist dies auch der Grenzwert an jeder Stelle x_0

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a = a.$$

Daher: Die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = c$ ist $f'(x) = 0$.

Differenzieren

Differenzieren

Musteraufgabe 3.15

Bestimme die erste Ableitung der Funktion

$$h(x) = x^4(5x^2 - 1)$$

Lösung:

Die Funktion ist ein Produkt der Form $h(x) = f(x)g(x)$ mit:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 & f'(x) &= 4x^3 \\ g(x) &= 5x^2 - 1 & g'(x) &= 10x \end{aligned}$$

Mit der **Produktregel**:

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ &= 4x^3(5x^2 - 1) + x^4 \cdot 10x = 30x^5 - 4x^3 \end{aligned}$$

Differenzieren

Satz 3.9: Summenregel

Sind $y = f(x)$ und $y = g(x)$ differenzierbare Funktionen, dann ist auch ihre Summe $(f+g)(x) := f(x) + g(x)$ eine differenzierbare Funktion und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

Differenzieren

Satz 3.12: Produktregel

Sind $y = f(x)$ und $y = g(x)$ differenzierbare Funktionen, dann ist auch ihr Produkt $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ eine differenzierbare Funktion und es gilt:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Ableitung von Potenzfunktionen

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

Bemerkung: In $f(x) = x^n$ muss n **keine** natürliche Zahl sein, sondern die Ableitungsregel gilt ganz allgemein für $n \in \mathbb{R}$.

Differenzieren

Satz 3.18: Kettenregel

Es seien $z = f(y)$ und $y = g(x)$ zwei differenzierbare Funktionen, die sich zu $f(g(x))$ verketten lassen. Dann ist auch die verkettete Funktion differenzierbar und es gilt:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Die Kettenregel hat eine sehr einfache Struktur. Sie besagt:

Die Ableitung eines verketteten Funktionenpaars ist gleich dem Produkt der Ableitungen der einzelnen Funktionen.

Differenzieren

Quotientenregel

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

Differenzieren

Musteraufgabe

Bestimme die erste Ableitung der Funktion $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$.

Lösung: Die Funktion $h(x)$ kann als eine Verkettung $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ der folgenden Funktionen geschrieben werden:

$$f(y) = \sqrt{\boldsymbol{y}} = y^{1/2} \qquad f'(y) = \frac{1}{2} y^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$\boldsymbol{y} = g(x) = \boldsymbol{1 + x^2} \qquad g'(x) = 2x$$

Mit der **Kettenregel**:

$$h'(x) = f'(y) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{y}} = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Differenzieren der Exponentialfunktion

Satz 3.26: Ableitung der Exponentialfunktion

Die Exponentialfunktion $f(x) = \exp(x) = e^x$ ist differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = \exp(x) = e^x$$

Bemerkung: Wenn wir Exponentialfunktionen differenzieren, dann begegnen sie uns meist in **verketteter Form**:

$$g(x) = e^{f(x)} = e^y \qquad \text{mit} \quad y = f(x)$$

Mittels der **Kettenregel** erhalten wir die wichtige Formel:

$$g'(x) = e^y \cdot y' = \boldsymbol{e^{f(x)} \cdot f'(x)}$$

Differenzieren des natürlichen Logarithmus

Ableitung des natürlichen Logarithmus

Der natürliche Logarithmus $f(x) = \ln x$ ist differenzierbar und es gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Bemerkung: Wenn wir natürliche Logarithmen differenzieren, dann begegnen sie uns ebenfalls meist in **verketteter Form**:

$$g(x) = \ln f(x) = \ln y \qquad \text{mit} \quad y = f(x)$$

Mittels der **Kettenregel** erhalten wir die wichtige Formel:

$$g'(x) = \frac{1}{y} \cdot y' = \boldsymbol{\frac{f'(x)}{f(x)}}$$

Differentialrechnung

Optimierung

Optimierung

Satz 3.57: Monotonieeigenschaften

Es sei f eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall (a, b).

- Wenn $f'(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, so ist $f(x)$ auf (a, b) **streng monoton wachsend**.
- Wenn $f'(x) < 0$ für $x \in (a, b)$, so ist $f(x)$ auf (a, b) **streng monoton fallend**.

Satz 3.58: Stationärer (kritischer) Punkt

Es sei f eine differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall (a, b) und es sei $x \in (a, b)$. Ist $f'(x) = 0$, so heißt x ein **stationärer (oder kritischer) Punkt** von f.

Optimierung

Satz 3.65: Lokales (relatives) Maximum und Minimum

Es sei f eine zweimal differenzierbare Funktion und x_0 ein **stationärer Punkt**. Dann gilt:

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) < 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ ist ein } \textbf{lokales Maximum (Hochpunkt)}$$

$$f'(x_0) = 0, \quad f''(x_0) > 0 \;\Rightarrow\; x_0 \text{ ist ein } \textbf{lokales Minimum (Tiefpunkt)}$$

Krümmung (Wölbung)

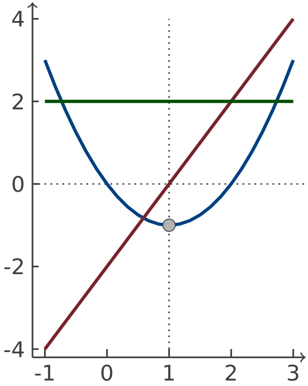
Satz 3.64: Konvexe und konkave Funktionen

Es sei f eine differenzierbare Funktion auf einem Intervall (a, b).

- Ist $f''(x) > 0$ für $x \in (a, b)$, dann ist f auf dem Intervall **konvex**. (f' ist dann auf dem Intervall streng monoton wachsend.)
- Ist $f''(x) < 0$ für $x \in (a, b)$, dann ist f auf dem Intervall **konkav**. (f' ist dann auf dem Intervall streng monoton fallend.)

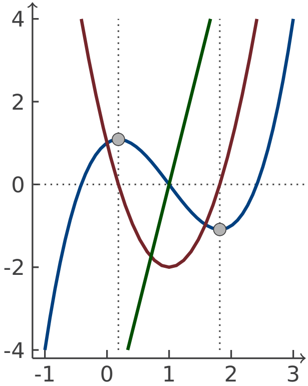
Minimum

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 2x \\
f'(x) &= 2x - 2 \\
f''(x) &= 2
\end{aligned}
$$



Lokales Maximum und Minimum

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + x + 1 \\ f'(x) &= 3x^2 - 6x + 1 \\ f''(x) &= 6x - 6 \end{aligned}$$



Optimierung

Musteraufgabe 3.67 – Gewinnoptimum eines Mengenanpassers

Ein Produktionsunternehmen ist in der Lage, jede beliebige Menge seines Produkts zum Preis von 10000 GE pro Stück (Marktpreis) zu verkaufen. Die Kostenfunktion sei

$$C(x) = \frac{x^3}{10} - 60x^2 + 10000x + 1200000.$$

- Welche Produktionsmenge maximiert den Gewinn?

Lösung Musteraufgabe 3.67

Lösung: Gewinn $=$ **Erlöse** $-$ **Kosten**

$$
\begin{aligned}
\text{Gewinn } \pi(x) &= R(x) - C(x) \\
&= 10000x - \left(\frac{x^3}{10} - 60x^2 + 10000x + 1200000\right) \\
&= -\frac{x^3}{10} + 60x^2 - 1200000 \\
\text{1. Ableitung: } \pi'(x) &= -\frac{3x^2}{10} + 120x \\
&= -\frac{3x}{10}(x - 400) = 0 \qquad (\textbf{Nullsetzen!})
\end{aligned}
$$

Lösung Musteraufgabe 3.67

Zwei stationäre Punkte:

$$x = 0, \quad \text{und} \quad x = 400$$

2. Ableitung: $\pi''(x) = -\frac{3x}{5} + 120$

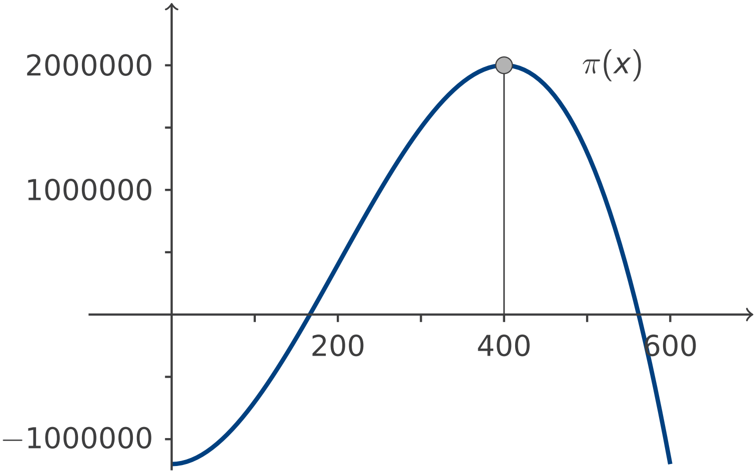
$\pi''(0) = 120$ und $\pi''(400) = -120 < 0$

$\Longrightarrow$ Gewinnmaximum in $x = 400$.

Im Gewinnoptimum:

$$R(400) = 4000000$$
$$C(400) = 2000000$$
$$\pi(400) = 2000000$$

Lösung Musteraufgabe 3.67



Musteraufgabe 3.69 – Monopol

Ein Unternehmen besitzt aufgrund eines Patents ein Monopol auf einen Wirkstoff, der von der Pharmaindustrie nachgefragt wird. Die Nachfragefunktion nach diesem Produkt lautet bei einem Preis p:

$$D(p) : x = 200e^{-0.01p} \qquad 0 < x < 200; x \text{ in Tonnen.}$$

Die Produktionskosten sind eine lineare Funktion der Ausbringungsmenge x:

$$C(x) = 1500 + 50x$$

- Welchen Gewinn erzielt das Unternehmen, wenn es seinen Erlös maximiert?
- Welchen Gewinn kann das Unternehmen maximal erzielen?

Lösung Musteraufgabe 3.69

Nachfragefunktion $\quad$ **Inverse Nachfragefunktion**

$$D(p) : x = 200e^{-0.01p} \quad \Longrightarrow \quad D^{-1}(x) : p = -100\ln(x) + 100\ln(200)$$

$$\begin{aligned}
\text{Erlös } R(x) &= p \cdot x = (-100\ln(x) + 100\ln(200)) \cdot x \\
&= -100\ln(x)x + 100\ln(200)x \\
R'(x) &= -100\ln(x) - 100 + 100\ln(200) \\
&= -100(\ln(x) + 1 - \ln(200)) = 0 \\
\to \ln(x) &= \ln(200) - 1 \\
x &= e^{\ln(200)-1} = \frac{200}{e} = 73.58 \\
R''(x) &= -\frac{100}{x} < 0 \quad \text{für alle } x > 0.
\end{aligned}$$

Erlösmaximum von $R(73.58) = 7357.59$ GE.

Lösung Musteraufgabe 3.69

$$\begin{aligned} \text{Gewinn } \pi(x) &= R(x) - C(x) \\ &= -100\ln(x)x + 100\ln(200)x - 50x - 1500 \end{aligned}$$

$$\pi(73.58) = 2178.8 \text{ GE}$$

Bemerkung: Die **inverse Nachfragefunktion** $D^{-1}(x)$ wird auch **Preis-Absatz-Funktion** oder **Preisfunktion der Nachfrage** $p(x)$ genannt.

Sie ergibt sich durch Auflösen von $D(p)$ nach p.

$$\begin{aligned} D(p) : x &= 200e^{-0.01p} \\ \ln(x) &= \ln(200) + (-0.01)p \\ p &= -100\ln(x) + 100\ln(200) \end{aligned}$$

Lösung Musteraufgabe 3.69

$$\text{Gewinn } \pi(x) = -100\ln(x)x + 100\ln(200)x - 50x - 1500$$

$$\pi'(x) = -100\ln(x) - 150 + 100\ln(200) = 0$$

$$\ln(x) = \ln(200) - \frac{3}{2}$$

Stationärer Punkt in $x_0 = \frac{200}{e^{3/2}} = 44.626$.

$$\pi''(x) = -\frac{100}{x} < 0 \quad \text{für alle } x > 0 \qquad \Longrightarrow \textbf{Maximum}$$

$\pi(44.626) = 2962.6$ GE **maximal möglicher Gewinn**

Differentialrechnung

Funktionen mit zwei Variablen

Funktionen mit zwei Variablen

Zuordnungsvorschrift $f : M \to \mathbb{R}$, die jedem Wertepaar (x_1, x_2) aus einer Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ eine Zahl $f(x_1, x_2)$ zuordnet.

M : **Definitionsbereich** von f, in den meisten wirtschaftlichen Anwendungen ist M der **nichtnegative Quadrant**:

$$\mathbb{R}^2_+ := \{(x_1, x_2) : x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Graphische Darstellung:

- durch perspektivische Bilder des **Funktionsgraphen**:
$$G_f = \{(x_1, x_2, z) : z = f(x_1, x_2), (x_1, x_2) \in M\}$$
- durch **Niveaulinien**
$$L_c = \{(x_1, x_2) : f(x_1, x_2) = c, (x_1, x_2) \in M\}$$

Funktionen mit zwei Variablen

Definition 8.4: Lineare Funktion

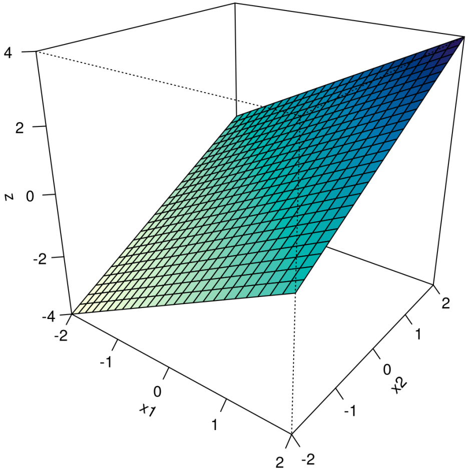
Unter einer linearen Funktion mit zwei Variablen versteht man eine Funktion mit dem Funktionsterm

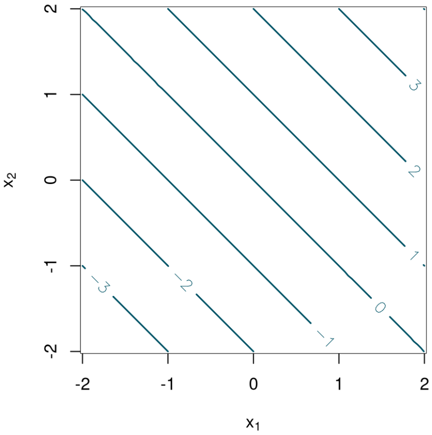
$$z = f(x_1, x_2) = b_1 x_1 + b_2 x_2 + c$$

Ist $c = 0$, dann nennt man f eine **homogene** lineare Funktion.

Funktionen mit zwei Variablen

Funktion $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$





Funktionen mit zwei Variablen

Definition 8.5: Quadratische Funktion

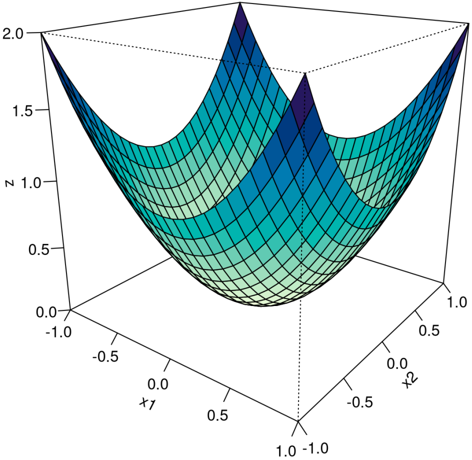
Unter einer quadratischen Funktion mit zwei Variablen versteht man eine Funktion mit dem Funktionsterm

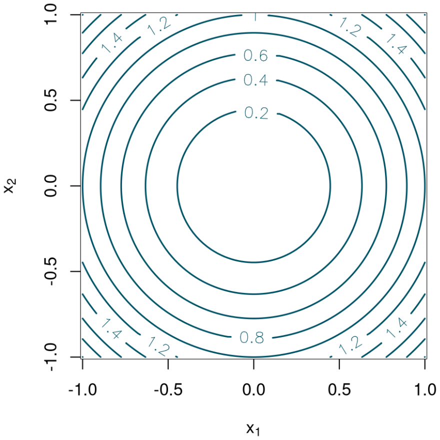
$$z = f(x_1, x_2) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + b_1x_1 + b_2x_2 + c$$

Sind $b_1 = b_2 = c = 0$, dann nennt man f eine **homogene** quadratische Funktion.

Funktionen mit zwei Variablen

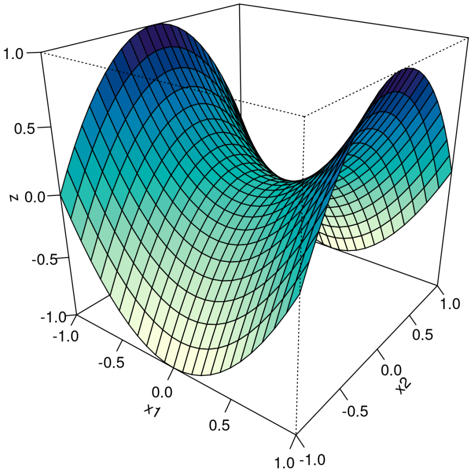
Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

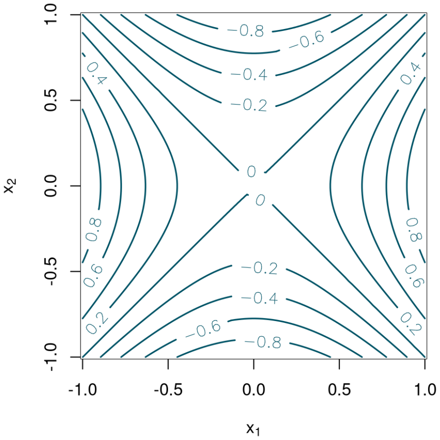




Funktionen mit zwei Variablen

Funktion $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$



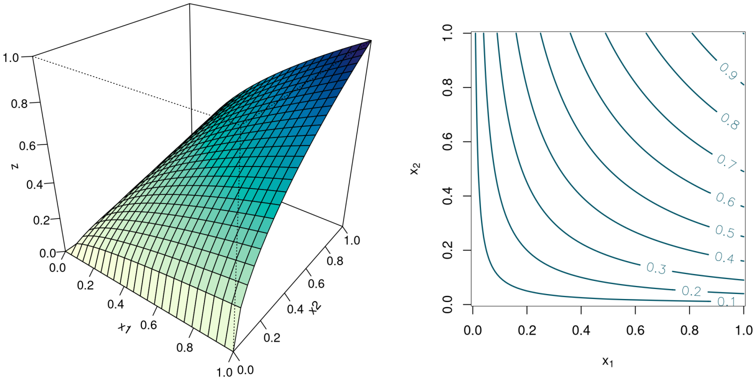


Funktionen mit zwei Variablen

Definition 8.9: Cobb-Douglas Funktion

Cobb-Douglas Funktionen besitzen den Funktionsterm:

$$z = f(x_1, x_2) = C\, x_1^{\alpha} x_2^{\beta}, \qquad \alpha, \beta \geq 0 \quad x_1, x_2 \geq 0$$



Differentialrechnung

Die erste Ableitung

Die erste Ableitung

Partielle Ableitung

Unter einer **partiellen Ableitung** einer Funktion f mit zwei Variablen versteht man die Ableitung der Funktion f nach einer der beiden Variablen x_1 oder x_2, wobei die andere Variable als **Konstante** behandelt wird.

Symbolisch:

$$\text{partielle Ableitung nach } x_1\text{:} \quad f_1' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_1}$$

$$\text{partielle Ableitung nach } x_2\text{:} \quad f_2' \quad \text{oder} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}$$

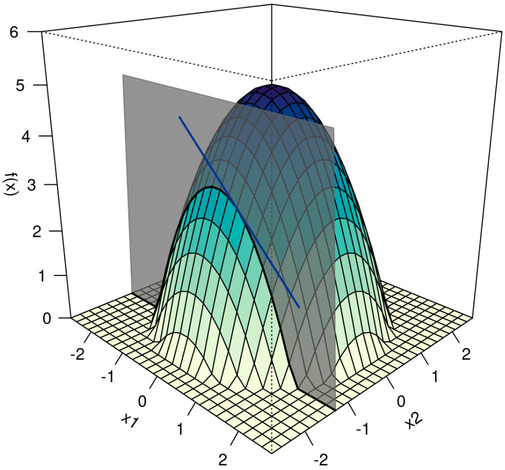
Der **Zeilenvektor**

$$f'(\mathbf{x}) = (f_1'(\mathbf{x}), f_2'(\mathbf{x}))$$

heisst **Ableitung** der Funktion f an der Stelle $\mathbf{x}$.

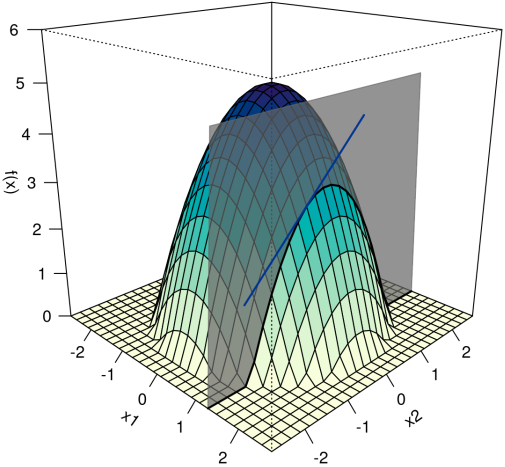
Die erste Ableitung

Partiell Differenzieren nach $x_1 \implies x_2$ ist konstant.



Die erste Ableitung

Partiell Differenzieren nach $x_2 \implies x_1$ ist konstant.



Die erste Ableitung

Musteraufgabe 8.16

Man finde die ersten partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + e^{2x_2}$ an der Stelle $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$.

Partiell differenzieren nach x_1 heisst, dass x_2 behandelt wird wie eine **additive Konstante** oder ein **konstanter Faktor**.

$$f_1'(x_1, x_2) = 3 \cdot 2 \cdot x_1 + 0 = 6x_1$$

$$f_1'(-1, 0) = -6$$

Partiell differenzieren nach x_2 heisst, dass x_1 behandelt wird wie eine **additive Konstante** oder ein **konstanter Faktor**.

$$f_2'(x_1, x_2) = 0 + 2e^{2x_2} = 2e^{2x_2}$$

$$f_2'(-1, 0) = 2$$

Die erste Ableitung

Musteraufgabe

Man bestimme die partiellen Ableitungen der Funktion $f(x_1, x_2) = 100x_1^{0.4}x_2^{0.6}$ an der Stelle $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

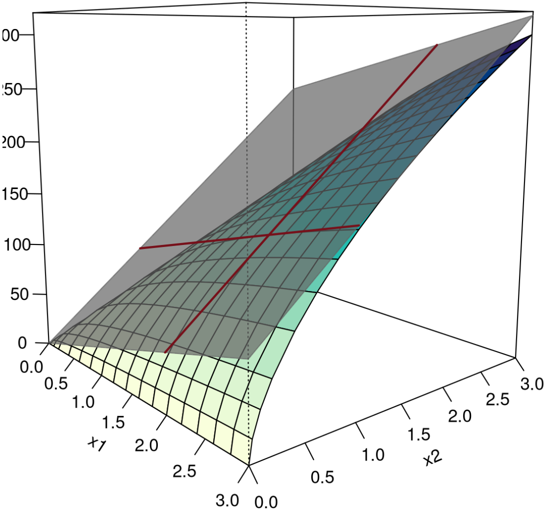
$$f_1'(x_1, x_2) = 100 \cdot 0.4 \cdot x_1^{0.4-1} \cdot x_2^{0.6} = 40x_1^{-0.6}x_2^{0.6}$$

$$f_1'(2, 1) = 40 \cdot 2^{-0.6} \cdot 1^{0.6} = 26.3902$$

$$f_2'(x_1, x_2) = 100 \cdot x_1^{0.4} \cdot 0.6 \cdot x_2^{0.6-1} = 60x_1^{0.4}x_2^{-0.4}$$

$$f_2'(2, 1) = 60 \cdot 2^{0.4} \cdot 1^{-0.4} = 79.1705$$

Die erste Ableitung



Differentialrechnung

Optimierung unter Nebenbedingungen

Optimierung unter Nebenbedingungen

Musteraufgabe 8.58

Die Produktionsfunktion laute $q = F(x_1, x_2) = 100x_1x_2$ und die Faktorpreise betragen 2 bzw. 3 GE pro Mengeneinheit. Man bestimme die optimale Faktorkombination bei einem Produktionsniveau von $q = 200$.

Damit lautet die Kostenfunktion $C(x_1, x_2) = 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2$. Diese soll minimiert werden unter der Nebenbedingung (engl. *subject to*, kurz *s.t.*), dass die Produktionsmenge $q = 200$ beträgt.

$$\begin{aligned} \min_{x_1, x_2} \quad & C \\ s.t. \quad & q = 100x_1x_2 = 200 \end{aligned}$$

Eine Lösungsmöglichkeit

Aus der Nebenbedingung folgt $x_2 = \frac{2}{x_1}$, eingesetzt in die Kostenfunktion ergibt

$$C(x_1) = 2x_1 + 3 \cdot \frac{2}{x_1}$$

Diese Funktion besitzt ein **eindeutiges Minimum**, bestimmt durch:

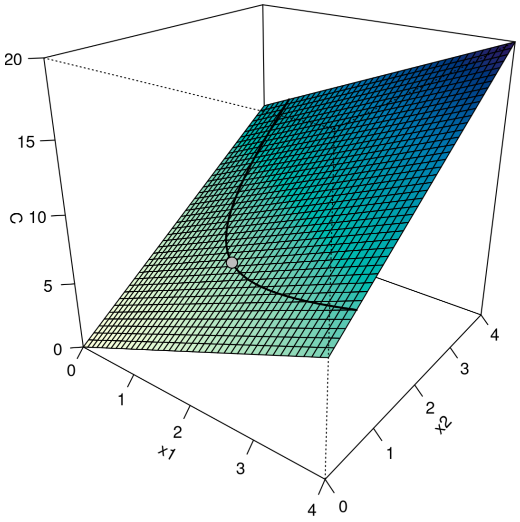
$$\begin{aligned} C'(x_1) &= 2 - \frac{6}{x_1^2} = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = \sqrt{3} = 1.7321 \\ C''(x_1) &= \frac{12}{x_1^3} \quad \rightarrow C''(\sqrt{3}) = 2.309 > 0 \end{aligned}$$

Optimale Faktorkombination:

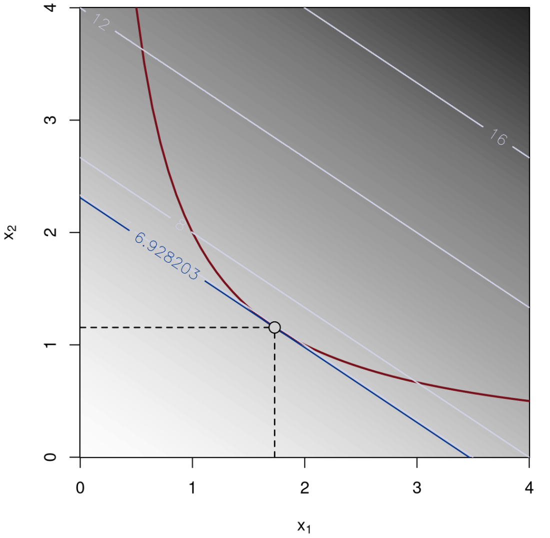
$$x_1 = 1.7321, \quad x_2 = 2/x_1 = 1.1547$$

Die Kosten betragen dabei $C(1.7321, 1.1547) = 6.9282$.

Grafische Veranschaulichung



Grafische Veranschaulichung



Optimierung unter Nebenbedingungen

Der obige Lösungsweg (das Einsetzverfahren) kann aufgrund der Komplexität des Freistellens nicht möglich sein, dann empfiehlt sich die Lagrange Methode.

Die Lagrange Methode

Es sei $C(x_1, x_2)$ eine Zielfunktion, die unter der Nebenbedingung $F(x_1, x_2) = q = const$ zu optimieren ist:

$$\underset{x_1, x_2}{opt}\, C(x_1, x_2) \quad s.t. \quad F(x_1, x_2) = q$$

Wir definieren eine neue Zielfunktion, die **Lagrange-Funktion**:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = C(x_1, x_2) - \lambda(F(x_1, x_2) - q)$$

mit λ dem sogenannten **Lagrange-Multiplikator**.

Optimierung unter Nebenbedingungen

Methode der Lagrange-Multiplikatoren – Rechenschema

$$\underset{x_1,x_2}{opt}\, C(x_1, x_2) \quad s.t. \quad F(x_1, x_2) = q$$

- **Schritt 1**: $L(x_1, x_2, \lambda) = C(x_1, x_2) - \lambda(F(x_1, x_2) - q)$
- **Schritt 2**: Wir suchen stationäre Punkte der Lagrange-Funktion.
  In einem stationären Punkt der Lagrange-Funktion sind alle **drei** partiellen Ableitungen Null:

$$\begin{aligned} L'_1 &= C'_1 - \lambda F'_1 = 0 \\ L'_2 &= C'_2 - \lambda F'_2 = 0 \\ L'_3 &= -(F - q) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad F - q = 0 \end{aligned}$$

  Die dritte Gleichung ist die **Nebenbedingung**, unter der optimiert wird.

Optimierung unter Nebenbedingungen

Musteraufgabe 8.58 (nochmals)

Minimiere $C(x_1, x_2) = 2x_1 + 3x_2$ unter der Nebenbedingung $100x_1x_2 = 200$.

Lösung: Die **Lagrange-Funktion** lautet:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 2x_1 + 3x_2 - \lambda(\mathbf{100x_1x_2} - \mathbf{200})$$

Wir bilden die drei partiellen Ableitungen:

$$L'_1 = 2 - 100\lambda x_2 = 0 \quad \Longrightarrow x_2 = \frac{0.02}{\lambda}$$

$$L'_2 = 3 - 100\lambda x_1 = 0 \quad \Longrightarrow x_1 = \frac{0.03}{\lambda}$$

$$L'_3 \text{ (Nebenbedingung)} : \quad 100x_1x_2 = 200 \quad \Longrightarrow x_1x_2 = 2$$

Lösung Musteraufgabe 8.58

Ein **stationärer Punkt** muss also die **drei Gleichungen** erfüllen:

$$x_1 = \frac{0.03}{\lambda}, \quad x_2 = \frac{0.02}{\lambda}, \quad x_1 x_2 = 2$$

Daraus errechnen wir

$$x_1 x_2 = 2 \implies \frac{0.02 \cdot 0.03}{\lambda^2} = 2 \implies \lambda = \sqrt{0.0003} = 0.0173$$

und erhalten so:

$$x_1 = \frac{0.03}{\sqrt{0.0003}} = 1.7321, \qquad x_2 = \frac{0.02}{\sqrt{0.0003}} = 1.1547$$

$$C(1.7321, 1.1547) = 6.9282$$

Grafische Veranschaulichung

Beobachtung: Im Optimum ist die Tangente der Nebenbedingung gleich der Tangente der Niveaulinie der Zielfunktion. (Hier sogar gleich der Niveaulinie selbst, weil diese linear ist.)

Allgemeiner: Man kann zeigen, dass die Steigungen der Tangenten

- der Nebenbedingung gleich $-\frac{F_1'}{F_2'}$ und
- die der Niveaulinien der Zielfunktion gleich $-\frac{C_1'}{C_2'}$ sind.

Der Lagrange-Ansatz besagt, dass im Optimum diese Steigungen gleich sein müssen und die Nebenbedingung erfüllt ist.

$$
\begin{aligned}
L_1' &= C_1' - \lambda F_1' = 0 & & \\
L_2' &= C_2' - \lambda F_2' = 0 & \quad\Rightarrow\quad & \frac{C_1'}{C_2'} = \frac{F_1'}{F_2'} \\
L_3' &= -(F - q) = 0 & & F = q
\end{aligned}
$$

Grafische Veranschaulichung