universität innsbruck

Mathematik

Thema 1
Lineare und quadratische Funktionen

Überblick

Thema: Lineare und quadratische Funktionen

Inhalte	Buch
Lineare Funktionen	1.1
Quadratische Funktionen	1.2
Exponentialfunktion und Logarithmus	2.6

Lineare und quadratische Funktionen

Lineare Funktionen

Lineare Funktionen

Der **Funktionsterm**

$$f(x) = kx + d$$

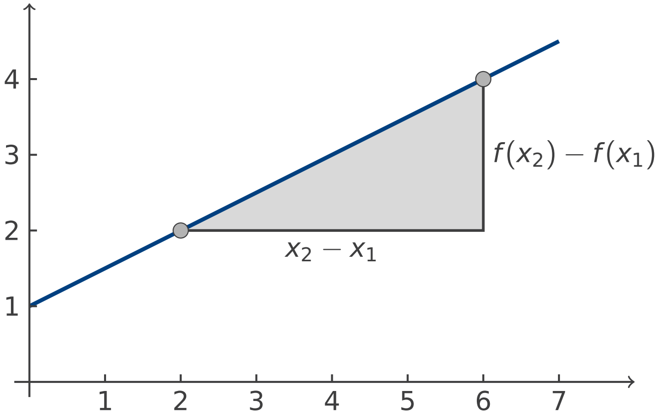
definiert eine **lineare Funktion**.

- Der **Funktionsgraph** einer linearen Funktion ist eine **Gerade**.
- Das **Steigungsverhältnis** ist konstant.

$$\text{Steigungsverhältnis: } \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(kx_2 + d) - (kx_1 + d)}{x_2 - x_1} = k.$$

Lineare Funktionen

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$



Lineare Funktionen

Lineare Kostenfunktionen

x = produzierte Gütermenge, $C(x)$ = Gesamtkosten bei Menge x.

- $C(x) = kx + d$ **Gesamtkosten**
- $C(0) = d$ **Fixkosten**
- $V(x) = C(x) - C(0) = kx$ **Variable Kosten**

Die **Durchschnittskosten** $\overline{C}(x)$ bilden **keine** lineare Funktion:

$$\overline{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{kx + d}{x} = k + \frac{d}{x}$$

Lineare Funktionen

Marginale Kosten

Der Kostenzuwachs bei Erhöhung der Produktionsmenge um 1 Einheit:

$$C(x+1) - C(x) = k(x+1) + d - (kx + d) = k$$

Die marginalen Kosten sind im Falle linearer Kosten gleich dem **Anstieg** k der Kostenfunktion!

Lineare Funktionen

Erlösfunktionen

Ist für alle Marktteilnehmer der **Marktpreis** p konstant, dann sind die Erlöse $R(x)$ der Unternehmen eine lineare Funktion der abgesetzten Menge x:

$$R(x) = p \cdot x$$

Der Graph der Funktion $R(x)$ ist eine Gerade durch den Nullpunkt, denn $R(0) = 0$.

Rentabilität im linearen Kostenmodell

Kostenfunktion: $C(x) = kx + d$, Erlösfunktion: $R(x) = px$

Rentabilitätsbedingung: $R(x) \geq C(x)$

➤ die Erlöse müssen die Kosten decken!

$$px \geq kx + d \quad \Longrightarrow \quad (p-k)x \geq d$$

Die Differenz $p - k$ nennt man **Deckungsbeitrag**.

Break-Even Point

Aus $(p-k)x = d$ folgt:

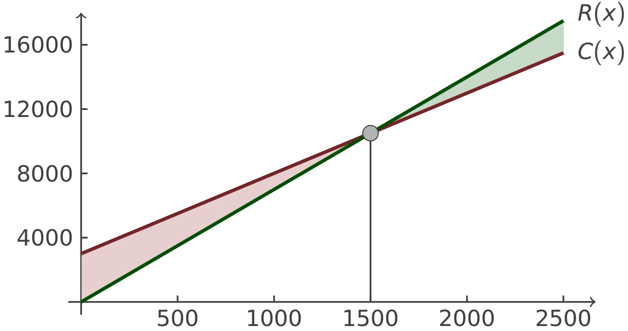
$$x_0 = \frac{d}{p-k} = \frac{\text{Fixkosten}}{\text{Deckungsbeitrag}}$$

$x_0 =$ **Gewinnschwelle** oder **Break-Even Point**.

Break-Even Point – Beispiel

$$\left.\begin{array}{lcrcl} \text{Kosten} & : & C(x) & = & 5x + 3000 \\ \text{Erlöse} & : & R(x) & = & 7x \end{array}\right\} \implies 7x = 5x + 3000$$

Break-Even Point: $2x = 3000 \implies x = 1500$



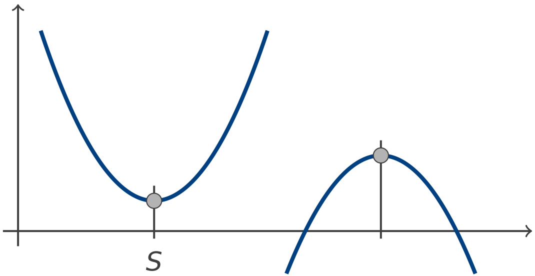
Lineare und quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

Quadratische Funktionen

Unter einer **quadratischen Funktion** versteht man eine reelle Funktion mit einem Funktionsterm der Form

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$



Scheitelpunkt $S = -\frac{b}{2a}$

Minimum, wenn $a > 0$
(f ist dann *konvex*, also *nach oben offen*)

Maximum, wenn $a < 0$
(f ist dann *konkav*, also *nach unten offen*)

Das lineare Marktmodell – Monopol

Erlösmaximierung eines Monopolisten

Wir unterstellen eine **lineare** Nachfragefunktion $D(p) = -ap + \alpha$.

Der Monopolist setzt den Preis p fest:

Erlös $$R(p) = p \cdot D(p) = -ap^2 + \alpha p$$

Das ist eine quadratische Funktion, **Maximum im Scheitel**.

Das lineare Marktmodell – Monopol

Musteraufgabe 1.14

Der Betreiber eines Schilifts besitzt in einem wunderschönen Schigebiet ein lokales Monopol. Vor zwei Jahren hatte der Betreiber bei einem Preis von 45 GE pro Stück 750 Tageskarten pro Tag verkaufen können. Als er im vergangenen Jahr den Preis auf 40 GE pro Karte senkte, stieg der Absatz auf 800 Karten pro Tag. Bei welchem Kartenpreis erzielt er die höchsten Einkünfte pro Tag?

Erlösfunktion: $R(p) = p \cdot D(p)$

Nachfragefunktion: $D(p) = -ap + \alpha$.

Wir kennen zwei Punkte P und Q auf der Nachfragefunktion:

$$\left.\begin{array}{rrcl} P(45, 750) \Longrightarrow & 750 & = & -45a + \alpha \\ Q(40, 800) \Longrightarrow & 800 & = & -40a + \alpha \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{rcl} a & = & 50/5 = 10 \\ \alpha & = & 1200 \end{array}$$

Lösung Musteraufgabe 1.14

Daraus folgen Nachfrage- und Erlösfunktion:

$$D(p) = -10p + 1200$$

$$R(p) = -10p^2 + 1200p = ap^2 + bp + c$$

Scheitelpunktformel:

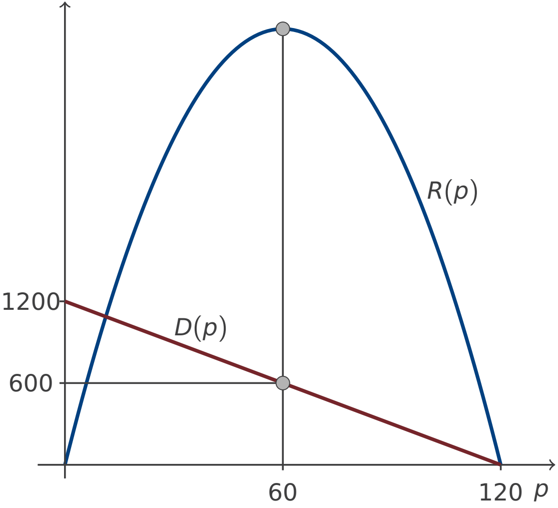
$$p_{\max} = -\frac{b}{2a} = -\frac{1200}{2 \cdot (-10)} = 60$$

Bei einem Preis von 60 GE pro Tageskarte wird der größte Erlös erzielt.

Bei diesem Preis beträgt die Nachfrage:

$$D(p_{\max}) = D(60) = -10 \cdot 60 + 1200 = 600 \text{ Tageskarten}$$

Lösung Musteraufgabe 1.14



Lineare und quadratische Funktionen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Exponentialfunktionen

Definition 2.43: Exponentialfunktion

Es sei $a > 0$.

Eine Funktion mit dem Funktionsterm $f(x) = Aa^x$ heißt **Exponentialfunktion**.

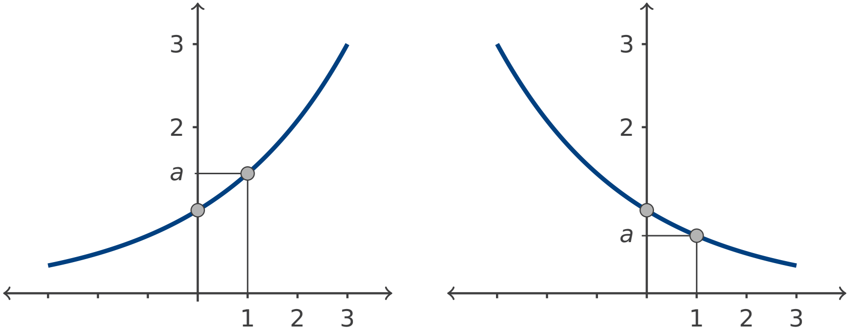
Bedeutung des Faktors A:

$$f(0) = Aa^0 = A,$$

d.h. A ist der **Funktionswert** an der Stelle $x = 0$.

Sonderfall $f(x) = a^x$: $f(0) = 1$, $f(1) = a$.

Exponentialfunktionen



Graph von a^x für $a > 1$ und $a < 1$

Exponentialfunktionen

Eigenschaften der Exponentialfunktion

Für Exponentialfunktionen $f(x) = a^x$ gilt:

- Eine Exponentialfunktion ist für alle reellen Zahlen definiert.
- Eine Exponentialfunktion nimmt **nur positive** Zahlen als Werte an.
- Die Exponentialfunktion ist stetig.
- Der Graph einer Exponentialfunktion geht durch den Punkt $(0, 1)$.
- Der Graph der Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ geht durch den Punkt $(1, a)$.

Exponentialfunktionen

Eigenschaften der Exponentialfunktion – Fortsetzung

- Ist $a > 1$, dann ist die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ **streng monoton wachsend**.
- Ist $0 < a < 1$, dann ist die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ **streng monoton fallend**.
- Die Exponentialfunktion ist auf endlichen Intervallen beschränkt, aber auf $\mathbb{R}$ unbeschränkt.
- Eine Exponentialfunktion ist **konvex**.

Exponentialfunktionen

Worin besteht die **praktische Bedeutung** von Exponentialfunktionen?

Für $f(x) = Aa^x$ ist die **relative (prozentuelle) Änderung** auf einem Intervall der Länge 1 **konstant**.

$$\frac{f(x+1) - f(x)}{f(x)} = \frac{Aa^{x+1} - Aa^x}{Aa^x} = a - 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Satz 2.44: Relative Änderung der Exponentialfunktion

Mit $r := a - 1$, d.h. $a = 1 + r$ gilt:

Eine Exponentialfunktion $f(x) = Aa^x = A(1+r)^x$ ändert sich auf Strecken der Länge 1 immer um denselben Prozentsatz r.

Anwendungen: Wachstumsprozesse, bspw. von biologischen Populationen oder von Kapital (durch Verzinsung $\to$ Thema 4).

Exponentialfunktionen

Musteraufgabe 2.46 – Kontinuierliches Populationswachstum

Eine Population mit dem Anfangsbestand $f(0) = 5000$ wächst in den nächsten 10 Jahren insgesamt um 12%. Wie groß ist die Population nach 2.5 Jahren? Wie lange dauert es, bis sich ihre Größe verdoppelt hat?

Lösung: Bei Annahme von kontinuierlichem Wachstum mit konstantem relativen Zuwachs gilt für die Populationsgröße zum Zeitpunkt t:

$$f(t) = Aa^t$$

Aus der Angabe:

$$\begin{aligned} f(0) &= Aa^0 = A = 5000 \\ f(10) &= 1.12 \cdot f(0) \end{aligned}$$

Exponentialfunktionen

Berechnung des Wachstumsfaktors a:

$$1.12 = \frac{f(10)}{f(0)} = \frac{Aa^{10}}{Aa^0} = a^{10}$$
$$a = \sqrt[10]{1.12} = 1.0113973$$

Also ist die Wachstumsrate $r = 0.0113973$, d.h. rund 1.14% pro Jahr.

Die Wachstumsfunktion lautet $f(t) = 5000 \cdot 1.0113973^t$.

Größe der Population nach 2.5 Jahren: $f(2.5) = 5143.69$.

Exponentialfunktionen

Für die Verdoppelungszeit lösen wir die Gleichung:

$$\begin{aligned} f(t) = 10000 &= 5000 \cdot 1.0113973^t \\ 2 &= 1.0113973^t \\ t &= \frac{\log(2)}{\log(1.0113973)} = 61.162707 \end{aligned}$$

Die Population verdoppelt sich daher in rund 61 Jahren.

Exponentialfunktionen

Rechenregeln für Exponentialfunktionen

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

Die Eulersche Zahl

Definition 2.47: Eulersche Zahl

Die Zahl

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

heißt **Eulersche Zahl**.

$$e = 2.7182818\ldots$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

Definition 2.54: Exponentialfunktion

Die Funktion exp ist definiert als die Exponentialfunktion

$$\exp(x) := e^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

mit der Basis e, wobei e die **Eulersche Zahl** bezeichnet.

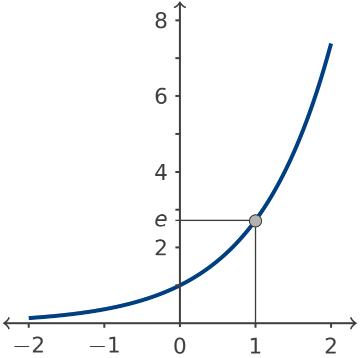
Diese spezielle Exponentialfunktion nennt man die **Exponentialfunktion** schlechthin.

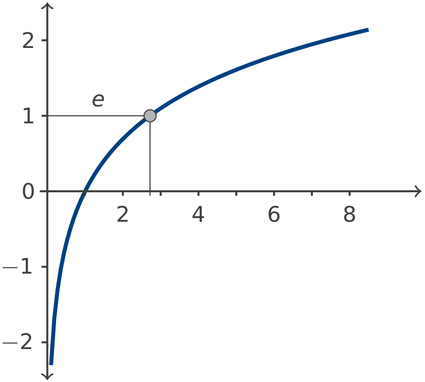
Im Volksmund: **„e-Potenz”**.

Definition 2.55: Natürlicher Logarithmus

Die **inverse Funktion** von exp heißt **natürlicher Logarithmus** und wird mit ln bezeichnet. (Alternative Schreibweisen: $\log_e$ oder auch nur log.)

Exponentialfunktion und Logarithmus





Graph von $f(x) = e^x$ und $f(x) = \ln x$

Exponentialfunktion und Logarithmus

Darstellung von Exponentialfunktionen

Wie kann man die Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ auf die Basis e umrechnen (als e-Potenz darstellen)?

$$a = e^{\ln a},$$

denn der $\ln$ ist die **Umkehrfunktion** von $\exp$.

$$\implies f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{(\ln a)x}.$$

Es gilt also: Jede Exponentialfunktion $f(x) = a^x$ läßt sich durch die Funktion $\exp$ (als e-Potenz) darstellen, und zwar durch

$$f(x) = a^x = e^{cx} = \exp(cx), \quad \text{wobei } c = \ln a.$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

Satz 2.58: Darstellungen von Exponentialfunktionen

- Es gibt **drei** verschiedene Darstellungsformen einer Exponentialfunktion:

$$f(x) = Aa^x = A(1+r)^x = Ae^{cx}.$$

- Dabei bezeichnet a den **Wachstumsfaktor**, r die **relative (prozentuelle) Änderung** und c die **nominelle Änderungsrate**.
- Diese Größen hängen zusammen durch:

$$r = a - 1, \quad c = \ln a.$$

Exponentialgleichungen

Unter einer **Exponentialgleichung** verstehen wir eine Gleichung der Form

$$a^x = b$$

mit $a > 0$ und $a \neq 1$.

Formaler Lösungsweg: **Logarithmieren**!

$$\begin{aligned} a^x = b \implies \ln a^x &= \ln b \\ \implies x \ln a &= \ln b \\ \implies x &= \frac{\ln b}{\ln a} \end{aligned}$$

Exponentialgleichungen

Beispiel 2.13

Löse die folgende Exponentialgleichung nach x:

$$3^x = 7$$

Lösung:

$$\begin{aligned} 3^x &= 7 \\ \ln 3^x &= \ln 7 \\ x \ln 3 &= \ln 7 \\ x &= \frac{\ln 7}{\ln 3} = 1.77 \end{aligned}$$

Logarithmen zu anderen Basen

Im vorigen Beispiel haben wir gesehen, dass

$$a^x = b \;\Leftrightarrow\; x = \frac{\ln b}{\ln a},$$

Damit ist also die Funktion

$$\log_a(b) = \frac{\ln b}{\ln a}$$

die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion mit Wachstumsfaktor a. Diese Funktion wird auch Logarithmus zur Basis a genannt.

- Der natürliche Logarithmus hat die Basis e, d.h. $\ln = \log_e$.
- Der dekadische Logarithmus hat die Basis 10. Statt $\log_{10}$ schreibt man häufig auch nur $\log$ (Buch).

Logarithmen zu anderen Basen

Rechenregeln Logarithmen

$$
\begin{aligned}
\log_a(x^y) &= y \cdot \log_a(x) \\
\log_a(x \cdot y) &= \log_a(x) + \log_a(y) \\
\log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y) \\
\log_a(x) &= \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}
\end{aligned}
$$